Системы счисления для профильной информатики

Лапшева Елена Евгеньевна,
ведущий программист ПРЦНИТ СГУ им. Н.Г.Чернышевского,
учитель информатики МОУ «Физико-технический лицей №1 г. Саратова»
Пономаренко Владимир Иванович,
к.ф.-м.н., старший научный сотрудник СФ ИРЭ РАН,
доцент кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии факультета нано- и биомедицинских технологий СГУ им. Н.Г.Чернышевского

17 мая 2007 года

Подумайте, сколькими разными способами можно записать число «десять». Один способ уже представлен в предыдущем предложении. Можно назвать еще достаточно много способов написания этого числа: 10, X, ten и т.д. Очевидно, что от написания названия числа его значение – «вес» – не изменяется. Следовательно, под *числом* понимается его величина, а не его символьная запись. Понятие числа – фундаментальное понятие, как математики, так и информатики. Символы, при помощи которых записывается число, называются *цифрами*.

Под системой счисления принято называть совокупность приемов обозначения (записи) чисел. Различают позиционные и непозиционные системы счисления.

Непозиционная система счисления – система счисления, в которой для обозначения чисел вводятся специальные знаки, количественное значение которых («вес» символа) всегда одинаково и не зависит от их места в записи числа. Самым известным примером непозиционной системы счисления является римская система счисления. В римской системе счисления для записи числа в качестве цифр используются буквы латинского алфавита.

I – 1 V – 5 X – 10 L – 50 C – 100 D – 500 M – 1000

Для записи чисел в римской системе используются два правила:

1) каждый меньший знак, поставленный слева от большего, вычитается из него;

2) каждый меньший знак, поставленный справа от большего, прибавляется к нему.

III = 1+1+1=3	IV = -1+5 = 4	VI = 5+1 =6
XL = -10+50 = 40	LX = 50+10 = 60	XC = -10+100 = 90
CIX = 100-1+10 = 109	MCMXCVIII = 1000-100+1000-10+100+5+1+1+1=1998	

Позиционный принцип в системе счисления

Позиционной системой счисления называется система счисления, в которой значение каждой цифры в изображении числа зависит от ее положения в ряду других цифр, изображающих число.

Положение, занимаемой цифрой при письменном обозначении числа называется разрядом.

Наша, естественная система счисления – десятичная – является позиционной. Это значит, что в числе 1978, цифра «1» – обозначает одну тысячу. Эта цифра стоит в позиции третьего разряда. Цифра «9» – девять сотен, второй разряд. Цифра «7» – семь десятков, первый разряд. А «8» – восемь единиц, нулевой разряд. Распишем вышесказанное в виде математической формулы:

$$1978 = 1000 + 900 + 70 + 8 = 1 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 8 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

Распишем подобным образом дробное число:

$$3019{,}7294 = 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4}.$$

Очевидно, что в десятичной системе счисления числа 10^n, где $n = (-\infty, +\infty)$ – номер разряда, играют ключевую роль в формировании записи числа. Эти числа называются *базисом десятичной системы счисления*. Число 10 для нашей десятичной системы счисления является ее *основанием*. Оно показывает, что каждые *десять* единиц образуют один десяток, *десять* десятков образуют одну сотню, *десять* сотен образуют одну тысячу и т.д. В общем случае, для десятичной системы счисления, каждые десять единиц любого разряда образуют одну единицу соседнего, более старшего разряда.

Базис системы счисления — это последовательность ключевых чисел, каждое из которых задает значение цифры в ее позиции или «вес» каждого разряда.

Выбирая за *основание системы счисления* любое натуральное число k, то есть, считая, что k единиц любого разряда образует одну единицу соседнего более крупного разряда, придем к так называемой *k-ичной системе счисления.*

Если $k<10$, то цифры от k до 9 становятся лишними. Если $k>10$, то для чисел от 10 до k-1 включительно надо придумать специальные обозначения цифр. Для 16-ричной системы счисления:

10_{10} — A_{16}

11_{10} — B_{16}

12_{10} — C_{16}

13_{10} — D_{16}

14_{10} — E_{16}

15_{10} — F_{16}

Базис двоичной системы счисления: $\ldots, 2^{-n}, \ldots, 2^{-2}, 2^{-1}, 1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots$

Базис восьмеричной системы счисления: $\ldots, 8^{-n}, \ldots, 8^{-2}, 8^{-1}, 1, 8, 64, 512, \ldots, 8^n, \ldots$

Или в общем виде: $q_{-n} = q^{-n}$, …, $q_{-2} = q^{-2}$, $q_{-1} = q^{-1}$, $q_0 = 1$, $q_1 = q$, $q_2 = q^2$, $q_3 = q^3$, ..., $q_n = q^n$, ..., где $q \in N$ и $q \neq 1$. *Число q называют основанием системы счисления.*

Каждое число в любой из таких систем может быть записано в цифровой и многочленной форме:

Цифровая форма: $A_q = \left(\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m}}\right)_q$, *где a_i – цифра в диапазоне от 0 до q-1.*

Многочленная форма:

$A_q = a_n \cdot q^n + a_{n-1} \cdot q^{n-1} + a_{n-2} \cdot q^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot q^2 + a_1 \cdot q + a_0 + a_{-1} \cdot q^{-1} + \ldots + a_{-m} \cdot q^{-m}$, *где q – основание системы счисления.*

Система счисления	Цифровая форма	Многочленная форма
Десятичная	4509,52	$4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$
Двоичная	11101,011	$\left(1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 1^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}\right)_{10} =$ $= \left(1 \cdot 10^{100} + 1 \cdot 10^{11} + 1 \cdot 10^{10} + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-10} + 1 \cdot 10^{-11}\right)_2$
Шестнадцатеричная	A5F,C	$\left(10 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 + 12 \cdot 16^{-1}\right)_{10} =$ $= \left(A \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + F \cdot 10^0 + C \cdot 10^{-1}\right)_{16}$

Связь между системами счисления

Научимся переводить целые числа из десятичной системы счисления в любую другую позиционную систему счисления.

Пусть нам дано десятичное число A_{10}, которое необходимо перевести в двоичную систему счисления. То есть мы должны найти такие b_i, где $i \in \{0,1\}$, что $A_{10} = (\overline{b_n b_{n-1} ... b_2 b_1 b_0})_2$. Запишем двоичное представление этого числа в многочленной форме:

$$A_{10} = (\overline{b_n b_{n-1} ... b_2 b_1 b_0})_2 = b_n \cdot 2^n + b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + ... + b_1 \cdot 2 + b_0 .$$

Чтобы найти b_0, необходимо найти остаток от деления исходного числа *A* на два. $b_0 = A_{10} \bmod 2$, где mod – операция поиска остатка от деления. Итак, первый найденный остаток от деления на основание новой системы счисления есть цифра нулевого разряда искомого двоичного числа. Квадратными скобками будем обозначать целую часть числа.

$$x_1 = \left[\frac{A_{10}}{2} \right] = (\overline{b_m b_{m-1} ... b_2 b_1})_2 = b_m \cdot 2^{m-1} + b_{m-1} \cdot 2^{m-2} + ... + b_2 \cdot 2 + b_1 .$$

Чтобы найти цифру b_1, необходимо найти остаток отделения x_1 на 2.

$b_1 = x_1 \bmod 2$. Итак, остаток от второго деления исходного числа на 2 есть цифра первого разряда искомого двоичного числа.

$$x_2 = \left[\frac{x_1}{2} \right] = (\overline{b_m b_{m-1} ... b_3 b_2})_2 = b_m \cdot 2^{m-2} + b_{m-1} \cdot 2^{m-3} + ... + b_3 \cdot 2^1 + b_2 .$$

Продолжаем наши рассуждения-вычисления до тех пор, пока не найдем последние искомые цифры.

$$b_{m-1} = x_{m-1} \bmod 2$$

$x_m = \left[\frac{x_{m-1}}{2} \right] = b_m$ - *m*-ный старший разряд искомого двоичного числа.

Опробуем разработанный алгоритм на конкретном примере. Проведем число 58_{10} в двоичную систему счисления:

№	A_{10}	x_i	Остаток b_i
0.	58		$b_0 = 58 \bmod 2 = 0$
1.		$x_1 = \left[\frac{58}{2} \right] = 29$	$b_1 = 29 \bmod 2 = 1$
2.		$x_2 = \left[\frac{29}{2} \right] = 14$	$b_2 = 14 \bmod 2 = 0$
3.		$x_3 = \left[\frac{14}{2} \right] = 7$	$b_3 = 7 \bmod 2 = 1$
4.		$x_4 = \left[\frac{7}{2} \right] = 3$	$b_4 = 3 \bmod 2 = 1$
5.		$x_5 = \left[\frac{3}{2} \right] = 1$	$b_5 = 1 \bmod 2 = 1$

Последний полученный остаток – старшая цифра искомого двоичного числа. Итак,

$58_{10}=111010_2$.

Этот алгоритм работает при переводе целого числа из десятичной системы счисления в систему счисления с любым основанием. Сформулируем этот алгоритм.

Алгоритм 1. *Для того чтобы исходное целое десятичное число A заменить равным ему целым числом B_p, необходимо число A разделить нацело на новое основание p, выделив частное и остаток. Полученное частное вновь разделить нацело на основание p и т.д. Цифрами искомого числа B_p являются остатки от деления, выписанные так, чтобы последний остаток являлся бы цифрой старшего разряда числа B_p.*

Воспользуемся методом «Деление столбиком». Будем отмечать полученные остатки.

$278_{10\to 8}$

$$\begin{array}{r|l}
278 & 8 \\ \cline{2-2}
\underline{24} & \begin{array}{r|l} 34 & 8 \\ \cline{2-2} \underline{32} & 4 \\ 2 & \end{array} \\
38 & \\
\underline{32} & \\
6 &
\end{array}$$

$278_{10} = 426_8$

$574_{10\to 16}$

$$\begin{array}{r|l}
574 & 16 \\ \cline{2-2}
\underline{48} & \begin{array}{r|l} 35 & 16 \\ \cline{2-2} \underline{32} & 2 \\ 3 & \end{array} \\
94 & \\
\underline{80} & \\
14 &
\end{array}$$

При переводе числе из десятичной системы счисления в систему счисления, основание которой больше десяти, нужно очень внимательно отнестись к записи цифр, чей «вес» больше или равен десяти. Для разобранного нами примера ответ будет следующим: $574_{10}=23E_{16}$.

Один из часто используемых способов перевода целых чисел из десятичной системы счисления в двоичную – разложение исходного числа на сумму степеней двойки. В искомом двоичном числе единицы будут стоять в позициях тех разрядов, степени двойки которых присутствуют в разложении. Например:

$$234_{10} = 128 + 64 + 32 + 8 + 2 = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^1 = \overset{7}{1}\overset{6}{1}\overset{5}{1}\overset{4}{0}\overset{3}{1}\overset{2}{0}\overset{1}{1}\overset{0}{0}{}_2$$

Теперь разберем алгоритм перевода правильных десятичных дробей в другую позиционную систему счисления. Пусть нам надо перевести число $0,A_{10}$ в двоичную систему счисления.

$$0,A_{10} = (0,\overline{b_{-1}b_{-2}b_{-3}...b_{-m}})_2 = b_{-1}\cdot 2^{-1} + b_{-2}\cdot 2^{-2} + ... + b_{-m}\cdot 2^{-m} = \frac{b_{-1}}{2} + \frac{b_{-2}}{2^2} + ... + \frac{b_{-m}}{2^m}.$$

Для того чтобы найти цифру b_{-1} нужно умножить $0,A_{10}$ на 2. Целая часть произведения и будет искомой цифрой.

$$x_{-1} = 0,A_{10}\cdot 2 = \left(\frac{b_{-1}}{2} + \frac{b_{-2}}{2^2} + ... + \frac{b_{-m}}{2^m}\right)\cdot 2 = b_{-1} + \frac{b_{-2}}{2} + ... + \frac{b_{-m}}{2^{m-1}}.$$

$b_{-1} = [x_{-1}]$.

Для того чтобы найти следующую цифру искомого двоичного числа, необходимо дробную часть полученного произведения вновь умножить на 2. Целая часть нового произведения будет следующей цифрой более младшего разряда искомого числа. Обозначим дробную часть числа фигурными скобками.

$$x_{-2} = \{x_{-1}\} \cdot 2 = \left(\frac{b_{-2}}{2} + \frac{b_{-3}}{2^2} + \ldots + \frac{b_{-m}}{2^{m-1}} \right) \cdot 2 = b_{-2} + \frac{b_{-3}}{2} + \ldots + \frac{b_{-m}}{2^{m-2}} .$$

$$b_{-2} = [x_{-2}].$$

Будем вычислять эти произведения пока не найдем цифру последнего разряда искомого двоичного числа.

$$x_{-m+1} = \{x_{-m+2}\} \cdot 2 = \left(\frac{b_{-m+1}}{2} + \frac{b_{-m}}{2^2} \right) \cdot 2 = b_{-m+1} + \frac{b_{-m}}{2} .$$

$$b_{-m+1} = [x_{-m+1}].$$

$$x_{-m} = \{x_{-m+1}\} \cdot 2 = \left(= \frac{b_{-m}}{2^2} \right) \cdot 2 = b_{-m} .$$

$$b_{-m} = [x_{-m}]$$

Вычисления должны продолжаться до тех пор, пока дробная часть очередного произведения не превратиться в ноль. Однако могут быть дроби, представление которых в новой системе счисления будет бесконечным.

Разберем пример применения этого алгоритма на конкретной правильной десятичной дроби.

№	$0,A_{10}$	x_i	b_i
-1.	0,125	$x_{-1} = 0{,}125 \cdot 2 = 0{,}25$	$b_{-1} = [x_{-1}] = [0{,}25] = 0$
-2.		$x_{-2} = \{x_{-1}\} \cdot 2 = 0{,}25 \cdot 2 = 0{,}5$	$b_{-2} = [x_{-2}] = [0{,}5] = 0$
-3.		$x_{-3} = \{x_{-2}\} \cdot 2 = 0{,}5 \cdot 2 = 1$	$b_{-3} = [x_{-3}] = [1] = 1$

Итак, $0{,}125_{10} = 0{,}001_2$.

Сформулируем этот алгоритм в общем виде.

Алгоритм 2. *Для того чтобы исходную правильную десятичную дробь 0,А заменить равной ей правильной дробью 0,B_p, нужно 0,А умножить на новое основание р. Целую часть полученного произведения считать цифрой старшего разряда искомой дроби. Дробную часть полученного произведения вновь умножить на р, целую часть полученного результата считать следующей цифрой искомой дроби. Эти операции продолжать до тех пор, пока дробная часть не окажется равной нулю, или не будет найден период, либо не будет достигнута требуемая точность.*

$0{,}375_{10} = 0{,}011_2$

0,375*2 = **0**,75

0,75*2 = **1**,5

0,5 = **1**,0

$0{,}375_{10} = 0{,}3_8$

0,375*8 = **3**,0

$0{,}375_{10} = 0{,}6_{16}$

0,375*16 = **6**,0

$0{,}3_{10} = 0{,}0(1001)_2$ $0{,}3 \cdot 2 = 0{,}6$ $0{,}6 \cdot 2 = 1{,}2$ $0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4$ $0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8$ $0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6$ и т.д.	В данном примере применение алгоритма 3 приведет к бесконечному повторению – периоду.

При переводе смешанных чисел из десятичной системы счисления в любую другую необходимо для целой части исходного числа использовать Алгоритм 1, а для дробной части – Алгоритм 2. Затем полученные результаты сложить.

Обратный перевод – из любой системы счисления в десятичную – мы уже по сути дела делали. Для этого достаточно просто перевести число в многочленную форму и вычислить этот многочлен по правилам десятичной арифметики.

$$(\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0, a_{-1} ... a_{-m}})_q = \left(a_n \cdot q^n + a_{n-1} \cdot q^{n-1} + ... + a_1 \cdot q + a_0 + \frac{a_{-1}}{q} + ... + \frac{a_{-m}}{q^m} \right)_{10}$$

Например,

$$1101111{,}011_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} =$$
$$= 111{,}375_{10}$$

$$7310{,}24_8 = 7 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^{-1} + 4 \cdot 8^{-2} = 3784{,}5625_{10}$$

Следовательно, общий алгоритм перевода из любой позиционной системы счисления в десятичную может звучать следующим образом:

Для того чтобы исходное число A_q заменить равным ему десятичным числом B, достаточно записать исходное число A_q в многочленной форме по правилам десятичной -арифметики, а затем вычислить полученный многочлен.

Но этот алгоритм можно сделать более удобным для вычисления. Для вычисления целой части можно применить схему Горнера. В вычислительной математике она используется оптимизации вычисления полиномов.

$$(\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0})_q = \left(a_n \cdot q^n + a_{n-1} \cdot q^{n-1} + ... + a_1 \cdot q + a_0\right)_{10} =$$
$$= (...((a_n \cdot q + a_{n-1}) \cdot q + a_{n-1}) \cdot q + ... a_1) \cdot q + a_0$$

Например,

$$F8A_{16} = ((15 \cdot 16 + 8) \cdot 16 + 10)_{10} = 3978_{10}$$

$$4302_5 = (((4 \cdot 5 + 3) \cdot 5 + 0) \cdot 5 + 2)_{10} = 577_{10}$$

$$11011101_2 = (((((((1 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1)_{10} = 221_{10}$$

Запишем этот алгоритм в общем случае.

Алгоритм 3. *Для того чтобы исходное целое число A_q заменить равным ему целым десятичным числом B, достаточно цифру старшего разряда числа A_q умножить по правилам десятичной арифметики на старое основание q. К полученному произведению прибавить цифру следующего разряда числа A_q. Полученную сумму вновь умножить на q, вновь к полученному произведению прибавить цифру следующего (более младшего) разряда. Так поступают до тех пор, пока не будет прибавлена младшая цифра числа A_q. Полученное число и будет искомым числом десятичным B.*

Подобным образом можно облегчить вычисление дробной части многочленной формы представления числа.

$$(\overline{0,a_{-1}...a_{-m}})_q = \left(\frac{a_{-1}}{q} + ... + \frac{a_{-m}}{q^m}\right)_{10} = (...((a_{-m} : q + a_{-m+1}) : q + a_{-m+2}) : q + ... + a_{-1}) : q \ .$$

Например,

$$0,1101_2 = (((1:2+0):2+1):2+1):2 = 0,8125_{10}$$

Запишем этот алгоритм в общем виде.

Алгоритм 4. *Для того чтобы исходную правильную дробь 0,A_q заменить равной ей правильной десятичной дробью 0,B, нужно цифру младшего разряда дроби 0,A_q разделить на старое основание q по правилам десятичной арифметики. К полученному частному прибавить цифру следующего (более старшего) разряда и далее поступать также, как и с первой цифрой. Эти операции продолжать до тех пор, пока не будет прибавлена цифра старшего разряда исходной дроби. После этого полученную сумму разделить еще раз на q.*

$$0,45_8 = (5:8+4):8 = 0,578125_{10}$$

$$0,\mathrm{F}03_{16} = ((3:16+0):16+15):16 = 0,9382324_{10}$$

Выбор оптимальной системы счисления

Давайте задумается над вопросом: какая из возможных позиционных систем счисления наиболее оптимальна для ручных вычислений? А для машинных вычислений?

С устными (ручными) вычислениями вроде бы все ясно. Мы с детства изучаем десятичную систему счисления. Начало использования системы счисления с основанием 10 очевидно – счет с помощью пальцев. Так что десятичный счет – это традиция, заложенная тысячелетиями.

Но удобно ли использовать десятичную систему счисления в машинных вычислениях? Один из самых важных критериев – объем памяти, которая хранит числа представленные в той или иной системе счисления. Другой критерий – величина самого большого числа, которое может быть представлено в этом объеме памяти.

Введем понятие экономичности представления числа в данной системе счисления.

Под *экономичностью системы счисления* будем понимать то количество чисел, которое можно записать в данной системе с помощью определенного количества цифр.

Речь в данном случае идет не о количестве разрядов, а об общем количестве сочетаний цифр, которые интерпретируются как различные числа.

Например, чтобы написать 1000 чисел (от 000 до 999) в десятичной системе счисления нам нужно 30 цифр (от 0 до 9 на каждый из трех разрядов). А в двоичной системе с помощью 30 цифр мы можем составить 2^{15} различных чисел. Количество разрядов в числе $\frac{30}{2} = 15$, количество цифр – две (0 и 1).

$2^{15} = 32768 > 1000$. Поэтому двоичная система счисления экономичнее десятичной.

Найдем самую экономичную систему счисления.

n – количество цифр, с помощью которых записываются числа.

x – основание системы счисления. Тогда количество разрядов в числе, записанных в этой системе счисления, равняется $\frac{n}{x}$. Отсюда количество чисел, которые можно записать, равно $x^{\frac{n}{x}}$. Найдем, при каком *x* это выражение принимает максимальное значение.

Пусть $n = 24$

Основание системы счисления	**Количество чисел, записанных с помощью 24-х цифр**
$x = 2$	$x^{\frac{24}{x}} = 2^{12} = 4096$
$x = 3$	$x^{\frac{24}{x}} = 3^{8} = 6561$
$x = 4$	$x^{\frac{24}{x}} = 4^{6} = 4096$
$x = 6$	$x^{\frac{24}{x}} = 6^{4} = 1296$
$x = 8$	$x^{\frac{24}{x}} = 8^{3} = 512$

Можно сделать вывод, что основание самой экономичной системы счисления лежит в диапазоне от 2 до 4.

Найдем точное значение, найдя производную функции: $f(x) = x^{\frac{n}{x}} = \left(x^{\frac{1}{x}} \right)^{n}$.

$$f'(x) = n \cdot \left(x^{\frac{1}{x}} \right)^{n-1} \cdot \frac{dx^{\frac{1}{x}}}{dx}.$$

Представим $x^{\frac{1}{x}}$ в следующем виде:

$x^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\ln\left(x^{\frac{1}{x}} \right) \right) = \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right)$. Отсюда:

$$\frac{dx^{\frac{1}{x}}}{dx} = \frac{d \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right)}{dx} = \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right) \cdot \frac{d\left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right)}{dx} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2} \right).$$

Итак, производная имеет вид:

$$f'(x) = n \cdot \left(x^{\frac{1}{x}} \right)^{n} \cdot x^{\frac{1}{x}} \cdot x^{-2} \cdot (1 - \ln x) = n \cdot x^{\frac{n}{x} - 2} \cdot (1 - \ln x)$$

Приравняем полученную производную нулю.

$\frac{df}{dx} = 0$, отсюда $\ln x = 1$, $x = e = 2{,}71828...$

Действительно, ближайшее целое число – три.

В 60-х годах в нашей стране была построена вычислительная машина «Сетунь», которая работала в троичной системе счисления. Предпочтение все же отдается двоичной системе, поскольку по экономичности она оказывается второй за троичной, а технически она реализуется гораздо проще остальных. Таким образом, простота технических решений оказывается не единственным аргументом в пользу применения двоичной системы в компьютерах.

Взаимосвязь между системами счисления с основаниями «2», «8» и «16»

Интерес к двоичной системе счисления вызван тем, что именно эта система используется для представления чисел в компьютере. Однако двоичная запись оказывается громоздкой, поскольку содержит много цифр, и, кроме того, она плохо воспринимается и запоминается человеком из-за зрительной однородности (все число состоит из нулей и единиц). Поэтому в нумерации ячеек памяти компьютера, записи кодов команд, нумерации регистров и устройств и пр. используются системы счисления с основаниями 8 и 16; выбор именно этих систем счисления обусловлен тем, что переход от них к двоичной системе и обратно осуществляется, как будет показано ниже, весьма простым образом.

Алгоритм 5. *Для записи двоичного числа в системе с основанием $q=2^n$ достаточно данное двоичное число разбить на группы цифр от запятой по n цифр в каждой группе. Затем каждую группу цифр следует рассматривать как n-разрядное двоичное число и записать его как цифру в системе с основанием $q=2^n$.*

Рассмотрим подробнее механизм работы этого алгоритма.

Пусть нам дано число $A_2 = 10010111101{,}11011_2$, которое нужно перевести в шестнадцатеричную систему счисления. Вспомним, что $16 = 2^4$. Представим это число в многочленной форме записи числа.

$$\begin{aligned}
&A_2 = 10010111101{,}11011_2 = \\
&= 1\cdot 2^{10} + 0\cdot 2^9 + 0\cdot 2^8 + 1\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + \\
&+ \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}
\end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые данного многочлена по степеням двойки: от -5 до -8, от -1 до -4, от 0 до 3, от 4 до 7, от 8 до 11.

$$\begin{aligned}
&A_2 = \left(0\cdot 2^{11} + 1\cdot 2^{10} + 0\cdot 2^9 + 0\cdot 2^8\right) + \left(1\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4\right) + \\
&+ \left(1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\right) + \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) + \left(\frac{1}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \frac{0}{2^7} + \frac{0}{2^8}\right)
\end{aligned}$$

Вынесем за скобки множители вида 2^i, где i кратно 4.

$$\begin{aligned}
&A_2 = \left(0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0\right)\cdot 2^8 + \left(1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\right)\cdot 2^4 + \\
&+ \left(1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\right)\cdot 2^0 + \left(1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\right)\cdot 2^{-4} + \\
&+ \left(1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0\right)\cdot 2^{-8} = \\
&= \left(0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0\right)\cdot 16^2 + \left(1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\right)\cdot 16^1 + \\
&+ \left(1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\right)\cdot 16^0 + \left(1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\right)\cdot 16^{-1} + \\
&+ \left(1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0\right)\cdot 16^{-2} = \\
&= b_2\cdot 16^2 + b_1\cdot 16^1 + b_0\cdot 16^0 + b_{-1}\cdot 16^{-1} + b_{-2}\cdot 16^{-2}
\end{aligned}$$

Мы получили многочленную форму представления числа в шестнадцатеричной системе счисления, где b_i - четырехзначные двоичные числа.

$$b_2 = 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 0100_2 = 4_{10} = 4_{16}$$

$$b_1 = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 1011_2 = 11_{10} = B_{16}$$

$$b_0 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 1101_2 = 13_{10} = D_{16}$$

$b_{-1} = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 1101_2 = 13_{10} = D_{16}$

$b_{-2} = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 1000_2 = 8_{10} = 8_{16}$

Отсюда,

$$A_2 = \left(4\cdot 16^2 + 11\cdot 16^1 + 13\cdot 16^0 + 13\cdot 16^{-1} + 8\cdot 16^{-2}\right)_{10} =$$
$$= \left(4\cdot 10^2 + B\cdot 10^1 + D\cdot 10^0 + D\cdot 10^{-1} + 8\cdot 10^{-2}\right)_{16} = 4BD,D8_{16}$$

Итак, $10010111101{,}11011_2 = 4BD,D8_{16}$

Для того чтобы быстро переводит числа из двоичной системы счисления в системы счисления с основанием 2^n нужно запомнить следующие таблицы соответствия.

Одной цифре в системе счисления с основанием 4 будет соответствовать двузначное двоичное число, так как $4 = 2^2$. Одной цифре в системе счисления с основанием 8 будет соответствовать трехзначное двоичное число, так как $8 = 2^3$. Одной цифре в системе счисления с основанием 16 будет соответствовать четырехзначное двоичное число, так как $16 = 2^4$.

2 с.с.	4 с.с.
00	0
01	1
10	2
11	3

2 с.с.	8 с.с.
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

2 с.с.	16 с.с.
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

Итак, например:

$$111011101{,}11101_{2\to 8} = \underbrace{111}_{7}\underbrace{011}_{3}\underbrace{101}_{5},\underbrace{111}_{7}\underbrace{010}_{2} = 735{,}72_8$$

В этом примере мы столкнулись с ситуацией, когда после запятой у двоичного числа количество цифр не кратно трем. В этом случае мы имеем право дописать столько нулей, сколько нам необходимо. У целых чисел незначащие нули дописываются слева самого старшего разряда, у дробей – справа самого младшего разряда.

$$111011101{,}11101_{2\to 16} = \underbrace{0001}_{1}\underbrace{1101}_{D}\underbrace{1101}_{D},\underbrace{1110}_{E}\underbrace{1000}_{8} = 1DD,E8_{16}$$

Алгоритм 6. *Для замены числа, записанного в системе счисления с основанием p=2^n, равным ему числом в двоичной системе счисления, достаточно каждую цифру данного числа заменить n-разрядным двоичным числом.*

$$3021{,}322_{4\to 2} = \underbrace{3}_{11}\underbrace{0}_{00}\underbrace{2}_{10}\underbrace{1}_{01},\underbrace{3}_{11}\underbrace{2}_{10}\underbrace{2}_{10} = 11001001{,}11101_2$$

Обратите внимание, что запятая, отделяющая дробную часть от целой, остается на месте.

$$F093,A8_{16\to 2} = \underbrace{F}_{1111}\,\underbrace{0}_{0000}\,\underbrace{9}_{1001}\,\underbrace{3}_{0011},\underbrace{A}_{1010}\,\underbrace{8}_{1000} = 1111000010\;010011,10101_2$$

Двоичная арифметика

Двоичная система счисления является минимальной системой, в которой реализуется *принцип позиционности* в цифровой форме записи числа. В двоичной системе счисления значение каждой цифры по месту при переходе от любого данного разряда к следующему старшему разряду увеличивается вдвое.

Утверждение двоичной арифметики в качестве общепринятой основы при конструировании ЭВМ с программным управлением состоялось под влиянием работы *А. Беркса, Х. Гольдстайна* и *Дж. фон Неймана* над проектом первой ЭВМ с хранимой в памяти программой.

Арифметика двоичной системы счисления, как и всякой другой позиционной системы, основывается на использовании таблиц сложения и умножения цифр.

+	**0**	**1**
0	0	1
1	0	10

×	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

Сложение двух многозначных двоичных чисел проводится «столбиком». Выравниваем два числа по запятой, а затем складываем соответствующие разряды этих чисел. При сложении двух единиц в соответствующем разряде суммы записываем ноль и единицу переносим в соседний старший разряд. Например:

$$\begin{array}{r} \dot{1}11\dot{0}\dot{1}1,1101 \\ +\quad \underline{10001,001} \\ 1001100,1111 \end{array}\;;\quad \begin{array}{r} \dot{1}\dot{1}1\dot{0}\dot{1}\dot{1},\dot{0}\dot{0}1 \\ +\quad \underline{\dot{1}101011,11101} \\ 10100111,00001 \end{array}$$

Умножение двоичных чисел также проводится столбиком:

$$\begin{array}{r} \times 101110 \\ \underline{1101} \\ 101110 \\ 0000000 \\ 10111000 \\ \underline{101110000} \\ 1001010110 \end{array}$$

Использованная литература

1. Стариченко Б.Е. Теоретические основы информатики: Учебное пособие для вузов./ 2-е изд., переработ. и доп. – М.: Горячая линия – Телеком, 2003. – 310 с.