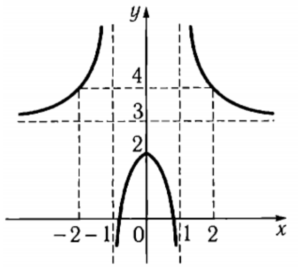
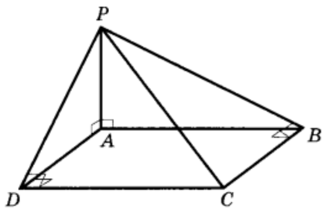
1. Один из корней уравнения $x^3 - 6x^2 + ax - 6 = 0$ равен 2. Найти a и два других корня этого уравнения.

2.На рисунке изображен график функции y=f(x). запишите множество значений этой функции



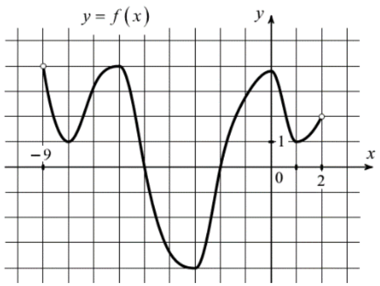


3. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведен прямая AP, перпендикулярная плоскости прямоугольника. Известно, что $PD = 6$ см, $BP = 7$ см, $PC = 9$ см. Найдите расстояние между прямыми PD и BC.

4. Найти тот корень уравнения $4\cos x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sqrt{3}$, для которого выражение $2x^2 + x - 3$ принимает наименьшее значение.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M — середина C_1D_1.
Найдите тангенс угла между плоскостями MA_1D и CA_1D.

6. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -10$.



7. Найдите расстояние от точки A(1,2,0) до плоскости x-7y+4z-5=0.

8. Найдите значение выражения

$$\cos\left(2\arcsin\frac{5}{13}\right).$$

9.

Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{18} \cdot 10^{21}$ м^2, а мощность её излучения равна $4{,}104 \cdot 10^{27}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

10. Вычислить $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{9-x}}{x^3 - 4x - 15}$

11.

На изготовление 837 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 899 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?

12

Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x + 15$ на отрезке $[4; 19]$.

часть 2

13

а) Решите уравнение $\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} = \cos^2 3x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

14

В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = \sqrt{33}$, все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на рёбрах AM и AB — точки F и G соответственно так, что $MF = BE = BG = 3$.
а) Докажите, что плоскость GEF проходит через точку C.
б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость GEF пересекает грань CMD пирамиды.

15. Решите неравенство

$$\left(x^2-9\right)\cdot\sqrt{x^2-4x-12}\leqslant\left(41-x^2\right)\cdot\sqrt{x^2-4x-12}.$$

16.

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N — середины рёбер CD и AB, соответственно, а NT — высота пирамиды $NSCD$ с вершиной N и основанием SCD.

а) Докажите, что точка T является серединой SM.

б) Найдите расстояние между NT и SC.

17.

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 1,25 млн руб.?

18.

Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\left((x-1)^2+(y-4)^2\right)\left((x-4)^2+(y-16)^2\right)\le 0,\\ (x-a-1)^2+(y-2a-2)^2\le 4(a+1)^2\end{cases}$$

не имеет решений.