Материал по теме «Задачи с параметром, сводящиеся к исследованию квадратного трехчлена»

Подборка задач для работы на уроке и самоподготовке по теме: ***"Задачи, сводящиеся к исследованию квадратного трехчлена"*****.**
«Решение иррациональных уравнений с параметром»

Теория: Иррациональные уравнения

Иррациональными уравнениями называются уравнения, содержащие переменную под знаком радикала (корня) или под знаком возведения в дробную степень. При этом, степень корня может быть произвольной.

Одним из методов решения этих уравнений является ***метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень***. В его основе лежит следующее утверждение:

Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же чётную натуральную степень даёт уравнение-следствие, а возведение обеих частей уравнения в одну и ту же нечётную степень даёт равносильное уравнение.

Поэтому, при возведении в чётную степень, необходимо находить область допустимых значений, либо выполнять проверку для найденных корней.

Этот метод обычно используется при решении уравнений вида:

I. $$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

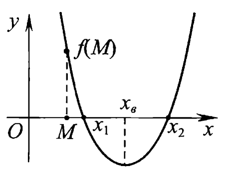
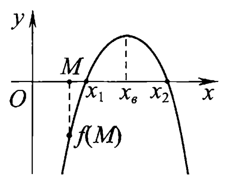
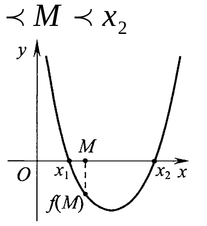
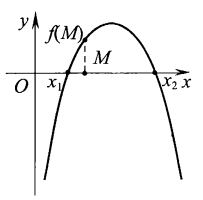
$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge 0. \end{cases}$$ или

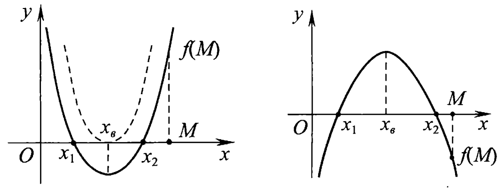
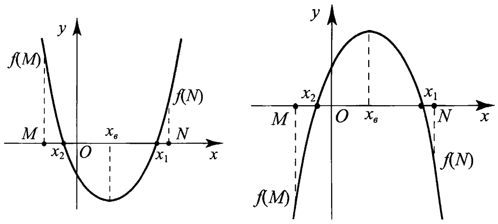
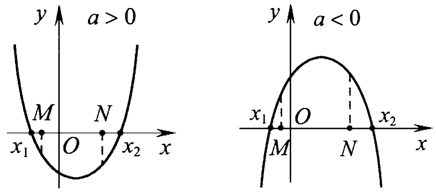
II. $$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \ge 0. \end{cases}$$ или

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

Необходимые и достаточные условия, задающие возможные случаи расположения корней квадратного трехчлена:

Пусть x_1 и x_2 ($x_1<x_2$) – корни квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+вx+c$ ($а,в,с \in R$ и $a \neq 0$); М - произвольное число. В таком случае:

Расположение чисел	Необходимое и достаточное условие
$M \prec x_1 \prec x_2$  	$\begin{cases} D \succ 0, \\ af(M) \succ 0, \\ M \prec -\dfrac{b}{2a}. \end{cases}$
$x_1 \prec M \prec x_2$  	$af(M) \prec 0$

$x_1 \prec x_2 \prec M$ 	$\begin{cases} D \succ 0, \\ af(M) \succ 0, \\ M \succ -\dfrac{b}{2a}. \end{cases}$
$M \prec x_1 \prec x_2 \prec N$ 	$\begin{cases} D \succ 0, \\ af(M) \succ 0, \\ af(N) \succ 0, \\ M \prec -\dfrac{b}{2a} \prec N. \end{cases}$
$x_1 \prec M \prec N \prec x_2$ 	$\begin{cases} af(M) \prec 0, \\ af(N) \prec 0. \end{cases}$

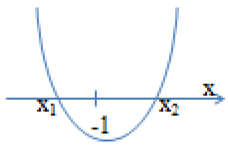
Пример 1: Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{a-(a+1)(2x+4)} = x+1$ имеет ровно один корень. http://www.alexlarin.net/

Решение: $\sqrt{a-(a+1)(2x+4)} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} a-(a+1)(2x+4) = (x+1)^2, \\ x \geq -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2(a+2)x+3a+5=0, \\ x \geq -1. \end{cases}$

Чтобы исходное уравнение имело один корень, уравнение $x^2+2(a+2)x+3a+5=0$ должно иметь один корень, больший или равный -1. Это возможно в следующих случаях:

1) Уравнение имеет один корень и он удовлетворяет условию, т.е. $D=0, x \geq -1$.

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4}=0, \\ -a-2 \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-a-1=0, \\ a \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ a \leq -1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$



2) Уравнение имеет два корня, причем $x_1 \prec -1, x_2 \succ -1$.

Пусть $f(x) = x^2+2(a+2)x+3a+5$, график парабола ветви вверх. Чтобы $x_1 \prec -1, x_2 \succ -1$ должно выполняться условие $f(-1) \prec 0$. Имеем $f(-1) = 1-4-2a+3a+5 \prec 0 \Rightarrow a \prec -2$.

3) Уравнение имеет два корня, причем $x_1 \prec -1, x_2 = -1$.

Если $x_2 = -1 \Rightarrow 1+2a+4+3a+5=0 \Rightarrow a=-2$.

При *a=-2* получим уравнение $x^2-1=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=-1 \Rightarrow$ что не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $(-\infty;-2) \cup \left\{ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\}$.

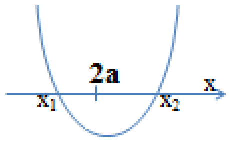
Пример 2: Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{9-x^2} = x-2a$ имеет ровно один корень.

Решение: $\sqrt{9-x^2} = x-2a \Leftrightarrow \begin{cases} 9-x^2=(x-2a)^2, \\ x-2a \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-4ax+4a^2-9=0, \\ x \geq 2a. \end{cases}$

Чтобы исходное уравнение имело один корень, уравнение $2x^2-4ax+4a^2-9=0$ должно иметь один корень, больший или равный *2a*. Это возможно в следующих случаях:

1) Уравнение имеет один корень и он удовлетворяет условию, т.е. $D=0, x \geq 2a$.

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} = 0, \\ a \ge 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2 - 8a^2 + 18 = 0, \\ a \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \\ a \le 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}.$$



2) Уравнение имеет два корня, причем $x_1 \prec -1, x_2 \succ -1$.

Пусть $f(x) = 2x^2 - 4ax + 4a^2 - 9$, график парабола ветви вверх. Чтобы $x_1 \prec 2a, x_2 \succ 2a$ должно выполняться условие $f(2a) \prec 0$. Имеем $f(2a) = 8a^2 - 8a^2 + 4a^2 - 9 \prec 0 \Rightarrow 4a^2 - 9 \prec 0 \Rightarrow a \in (-1{,}5; 1{,}5)$.

3) Уравнение имеет два корня, причем $x_1 \prec 2a, x_2 = 2a$.

Если $x_2 = 2a \Rightarrow 8a^2 - 8a^2 + 4a^2 - 9 = 0 \Rightarrow a = \pm 1{,}5$.

При *a=-1,5* получим уравнение $2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -3 \Rightarrow$ что не удовлетворяет условию задачи.

При *a=1,5* получим уравнение $2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3 \Rightarrow$ что удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $(-1{,}5; 1{,}5] \cup \left\{ -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \right\}$.

Система упражнений:

1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{2x(a-2)+5-a^2} = x - 2$ имеет единственное решение.
Ответ: $[1; 3)$.

2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{a - 2(a+1)x} = x - 1$ имеет единственное решение.
Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left\{ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\}$.

3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{5ax+3} = 5x + 3$ имеет единственное решение.
Ответ: $(-\infty; 1) \cup \{6 \pm 2\sqrt{6}\}$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x^2 + 7x} = x + \dfrac{a}{4}$ имеет единственное решение.
Ответ: $[0; 14) \cup [28; +\infty)$.

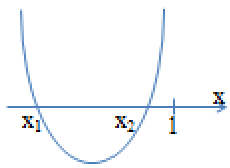
Пример 3: Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{2x^2 + ax + 2a + 10} = x - 1$ не имеет корней.

Решение: $\sqrt{2x^2 + ax + 2a + 10} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + ax + 2a + 10 = (x-1)^2, \\ x \ge 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (a+2)x + 2a + 9 = 0, \\ x \ge 1. \end{cases}$

Чтобы исходное уравнение не имело корней, уравнение $x^2 + (a+2)x + 2a + 9 = 0$ должно не иметь корней или иметь корни , которые будут меньше 1. Это возможно в следующих случаях:

1) Уравнение не имеет корни, т.е. $D \prec 0$.

$D = (a+2)^2 - 4(2a+9) = a^2 - 4a - 32 \prec 0 \Rightarrow a \in (-4; 8)$.



2) Уравнение имеет корни, причем $x_1 \le x_2 \prec 1$.

Пусть $f(x) = x^2 + (a+2)x + 2a + 9$, график парабола ветви вверх. Чтобы $x_1 \le x_2 \prec 1$ должны выполняться условия

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(1) \succ 0, \\ x_0 \prec 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -4] \cup [8; +\infty), \\ 1 + a + 2 + 2a + 9 \succ 0, \\ \dfrac{-a-2}{2} \prec 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -4] \cup [8; +\infty), \\ a \succ -4, \\ a \succ -4; \end{cases} \Rightarrow a \in [8; +\infty)$$

Объединяя полученные результаты $a \in (-4; +\infty)$.

Ответ: $(-4; +\infty)$.

Система упражнений:

1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{19x^2 - (9a+2)x + a^2 + 1} = x - 1$ не имеет корней.

Ответ: $(-\infty; 3)$.

2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{2x - a} = 4 - x$ не имеет корней.

Ответ: $(8; +\infty)$.

3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x^2 - 4ax - 7a} = 3 - x$ решения не имеет

Ответ: $\left(\dfrac{9}{19}; \dfrac{3}{2}\right]$.

Пример 4: При каких значениях параметра а уравнение $\sqrt{x^4 - 4x^2 + 9a^2} = x^2 + 2x - 3a$ имеет ровно три различных корня. (Статград 2020)

Решение: $\sqrt{x^4 - 4x^2 + 9a^2} = x^2 + 2x - 3a \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3a \geq 0, \\ x^4 - 4x^2 + 9a^2 = (x^2 + 2x - 3a)^2; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3a \geq 0, \\ x^4 - 4x^2 + 9a^2 = x^4 + 4x^2 + 9a^2 + 4x^3 - 6ax^2 - 12ax; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3a \geq 0, \\ 2x^3 + x^2(4 - 3a) - 6ax = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3a \geq 0, \\ x\left(2x^2 - x(3a - 4) - 6a\right) = 0. \end{cases}$$

Решим уравнение системы $x\left(2x^2 - x(3a-4) - 6a\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 2x^2 - x(3a-4) - 6a = 0; \end{array}\right.$

Уравнение $2x^2 - x(3a-4) - 6a = 0$ должно иметь два различных корня, не равных 0. Найдем эти корни:

$D = (3a-4)^2 + 48a = (3a+4)^2 \neq 0 \Rightarrow a \neq -\dfrac{4}{3}$ и $x = \dfrac{3a - 4 \pm (3a+4)}{4}$.

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3a}{2} \neq 0, \\ x = -2 \neq 0; \end{array}\right. \Rightarrow a \neq 0.$$

Имеем три корня $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -2, \; \textit{при } a \neq -\dfrac{4}{3}; 0. \\ x = \dfrac{3a}{2}; \end{array}\right.$ Эти корни должны удовлетворять условию $x^2 + 2x - 3a \geq 0$, т.е. $\begin{cases}\left[\begin{aligned}&x=0,\\&x=-2,\\&x=1,5a;\end{aligned}\right.\\x^2+2x-3a\ge 0;\end{cases}$ *при* $a\ne -\dfrac{4}{3};0.$ $\begin{cases}0-0-3a\ge 0,\\4-4-3a\ge 0,\\2,25a^2+3a-3a\ge 0,\\a\ne -\dfrac{4}{3},\\a\ne 0;\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}a\le 0,\\a\ne 0,\\a\ne -\dfrac{4}{3}.\end{cases}\Rightarrow\ a\in\left(-\infty;-\dfrac{4}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{4}{3};0\right).$

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{4}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{4}{3};0\right).$

Пример 5: При каких значениях параметра а уравнение $\sqrt{17x^2+8ax+16}=x^2+ax+4$ имеет ровно три различных корня.

Решение: $\sqrt{17x^2+8ax+16}=x^2+ax+4\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+ax+4\ge 0,\\17x^2+8ax+16=\left(x^2+ax+4\right)^2;\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x^2+ax+4\ge 0,\\17x^2+8ax+16=x^4+a^2x^2+16+2ax^3+8x^2+8ax;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+ax+4\ge 0,\\x^4+2ax^3+\left(a^2-9\right)x^2=0;\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x^2+ax+4\ge 0,\\x^2\left(x^2+2ax+a^2-9\right)=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+ax+4\ge 0,\\x^2\left(\left(x+a\right)^2-9\right)=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+ax+4\ge 0,\\x^2\left(x+a-3\right)\left(x+a+3\right)=0.\end{cases}$

Уравнение $x^2\left(x+a-3\right)\left(x+a+3\right)=0$ имеет корни $\left[\begin{aligned}&x=0,\\&x=-a+3,\\&x=-a-3.\end{aligned}\right.$ Они различны, если

$\left[\begin{aligned}&-a+3\ne 0,\\&-a-3\ne 0,\end{aligned}\right.\Rightarrow a\ne\pm 3.$

Имеем три корня $\left[\begin{aligned}&x=0,\\&x=-a+3,\\&x=-a-3,\end{aligned}\right.$ *при* $a\ne\pm 3.$

Исходное уравнение имеет три корня, если три найденных различных корня удовлетворяют условию $x^2+ax+4\ge 0,$ т.е. $\begin{cases}\left[\begin{aligned}&x=0,\\&x=-a+3,\\&x=-a-3;\end{aligned}\right.\\x^2+ax+4\ge 0;\end{cases}$ *при* $a\ne\pm 3.$ $\begin{cases}4\ge 0,\\\left(a-3\right)^2-a\left(a-3\right)+4\ge 0,\\\left(a+3\right)^2-a\left(a+3\right)+4\ge 0,\\a\ne\pm 3,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3a+13\ge 0,\\3a+13\ge 0,\\a\ne\pm 3,\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}a\le\dfrac{13}{3},\\a\ge -\dfrac{13}{3},\\a\ne\pm 3.\end{cases}\Rightarrow a\in\left[-\dfrac{13}{3};-3\right)\cup\left(-3;3\right)\cup\left(3;\dfrac{13}{3}\right].$

Ответ: $\left[-\dfrac{13}{3};-3\right)\cup\left(-3;3\right)\cup\left(3;\dfrac{13}{3}\right].$

Система упражнений:

1. При каких значениях параметра а уравнение $\sqrt{x^4-x^2+a^2}=x^2-a-x$ имеет ровно три различных корня.

Ответ: $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(-1;0\right)$.

2. При каких значениях параметра а уравнение $\sqrt{x^4-9x^2+a^2}=x^2+3x-a$ имеет ровно три различных корня.
Ответ: $\left(-\infty;-9\right)\cup\left(-9;0\right)$.

3. При каких значениях параметра а уравнение $\sqrt{x^4+(2a-3)x^2+4a^2}=x^2+3x-2a$ имеет ровно три различных корня.
Ответ: $\left(-\infty;-2\right)\cup\left(-2;-1\right]$.

4. При каких значениях параметра а уравнение $\sqrt{x^4-16x^2+64a^2}=x^2+4x-8a$ имеет ровно три различных корня.
Ответ: $\left(-\infty;-2\right)\cup\left(-2;0\right)$.

5. При каких значениях параметра а уравнение $\sqrt{15x^2+6ax+9}=x^2+ax+3$ имеет ровно три различных корня.
Ответ: $\left[-4;-3\right)\cup\left(-3;3\right)\cup\left(3;4\right]$.

6. При каких значениях параметра а уравнение $\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$ имеет ровно три различных корня.
Ответ: $\left[-2;-1\right)\cup\left(-1;1\right)\cup\left(1;2\right]$.

«Замена переменной при решении иррациональных уравнений с параметром»

Пример 6: Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{2x-6}+12x=4ax+8-2a$ имеет ровно одно решение.

Решение: Выполним замену $\sqrt{2x-6}=t,$ где $t\geq 0.$ Выразим переменную х, для этого возведем равенство $\sqrt{2x-6}=t$ в квадрат, получим $x=\dfrac{t^2+6}{2}.$ Тогда исходное уравнение преобразуется к виду $\left(2a-6\right)t^2-t+10a-28=0.$ Исходное уравнение имеет одно решение, если уравнение $\left(2a-6\right)t^2-t+10a-28=0$ имеет единственное неотрицательное решение. Это возможно в следующих случаях:

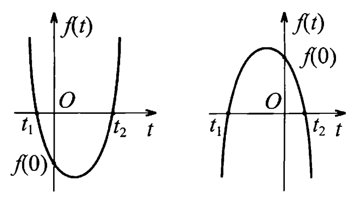
1) $2a-6=0\Rightarrow a=3,$ тогда уравнение $\left(2a-6\right)t^2-t+10a-28=0$ становится линейным и имеет одно решение. Проверим, что это решение неотрицательно $-t+30-28=0\Rightarrow t=2\succ 0.$ Следовательно $a=3$ удовлетворяет решению задачи.

2) $2a-6\neq 0,$ тогда уравнение $\left(2a-6\right)t^2-t+10a-28=0$ квадратное имеет один корень, если дискриминант равен 0. $D=1-4\left(2a-6\right)\left(10a-8\right)=-80a^2+464a-671=0.$ Решим уравнение $80a^2-464a+671=0,$ $a=2,75$ и $a=3,05.$ Проверим имеет ли уравнение при заданных значениях параметра неотрицательные корни.

При $a=2,75\Rightarrow 0,5t^2+t+0,5=0\Leftrightarrow t^2+2t+1=0\Rightarrow t=-1\prec 0.$ Следовательно $a=2,75$ не удовлетворяет условию задачи.

При $a=3,05\Rightarrow 0,1t^2-t+2,5=0\Leftrightarrow t^2-10t+25\Rightarrow t=5\succ 0.$ Следовательно $a=3,05$ удовлетворяет условию задачи.

3) Уравнение $\left(2a-6\right)t^2-t+10a-28=0$ имеет два корня разных знаков. Для этого должны выполняться следующие условия:



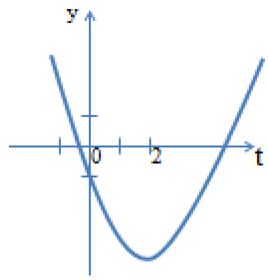
$$\begin{cases} D\succ 0, \\ t_1\cdot t_2\prec 0; \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a\in\left(2,75;3,05\right), \\ \dfrac{10a-28}{2a-6}\prec 0; \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a\in\left(2,75;3,05\right), \\ a\in\left(2,8;3\right); \end{cases}\Rightarrow a\in\left(2,8;3\right).$$

4) Уравнение имеет два корня, один из которых равен 0, а другой отрицательный. Если $t=0\Rightarrow a=2,8,$ выясним каким будет второй корень . $\left(2\cdot 2,8-6\right)t^2-t=0\Rightarrow -0,4t^2-t=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} t=0, \\ t=-2,5. \end{array}\right.$

Так как второй корень отрицательный, следовательно уравнение $(2a-6)t^2-t+10a-28=0$ при $a=2{,}8$ имеет один неотрицательный корень. Следовательно $a=2{,}8$ удовлетворяет условию задачи. Объединяя результаты получаем ответ $a\in[2{,}8;3]\cup\{3{,}05\}$.

Ответ: $[2{,}8;3]\cup\{3{,}05\}$.

Пример 7: Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $4x+7-4\sqrt{4x-x^2}=x^2+a^2+2a$ имеет хотя бы одно решение.



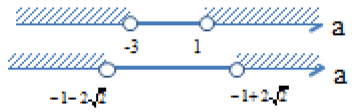
Решение: Выполним замену $\sqrt{4x-x^2}=t$, где $t\geq 0$. Тогда исходное уравнение преобразуется к виду $t^2-4t+7-a^2-2a=0$. Заметим, что $0\leq t=\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4-4+4x-x^2}=\sqrt{4-(2-x)^2}\leq 2$. Значит исходное уравнение имеет хотя бы одно решение, если уравнение $t^2-4t+7-a^2-2a=0$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $[0;2]$.

Выясним когда это уравнение не имеет решений на заданном отрезке. Это возможно в следующих случаях:

1) Если дискриминант уравнения отрицателен. $D=4-7+a^2+2a=a^2+2a-3\prec 0\Rightarrow a\in(-3;1)$.

2) Рассмотрим функцию $f(t)=t^2-4t+7-a^2-2a$, график парабола ветви вверх, вершина находится в точке с абсциссой 2. Следовательно, чтобы уравнение $t^2-4t+7-a^2-2a=0$ не имело решений на отрезке $[0;2]$, должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} D\succ 0, \\ f(0)\prec 0, \\ f(2)\prec 0; \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a^2+2a-3\succ 0, \\ a^2+2a-7\succ 0, \\ a^2+2a-3\succ 0 \end{cases}\Rightarrow a\in\left(-\infty;-1-2\sqrt{2}\right)\cup\left(-1+2\sqrt{2};+\infty\right).$$



При $a\in\left(-\infty;-1-2\sqrt{2}\right)\cup(-3;1)\cup\left(-1+2\sqrt{2};+\infty\right)$ уравнение $t^2-4t+7-a^2-2a=0$ не имеет решений на отрезке $[0;2]$, следовательно при $a\in\left[-1-\sqrt{2};-3\right]\cup\left[1;-1+\sqrt{2}\right]$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $\left[-1-\sqrt{2};-3\right]\cup\left[1;-1+\sqrt{2}\right]$.

Пример 8: Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $2a^2-x^2-3a+8x=(3a-3)\sqrt{16-(x-4)^2}$ имеет ровно два различных действительных корня.

Решение:

Выполним преобразования подкоренного выражения $16-(x-4)^2=16-x^2+8x-16=-x^2+8x$. Получим уравнение $-x^2+8x-(3a-3)\sqrt{-x^2+8x}+2a^2-3a=0$. Выполним замену $\sqrt{8x-x^2}=t$, где $t\geq 0$. Тогда исходное уравнение преобразуется к виду $t^2-(3a-3)t+2a^2-3a=0$. Уравнение квадратное имеет не более двух корней. Выясним сколько корней может иметь уравнение $\sqrt{8x-x^2}=t$. Заметим, что $0\leq t=\sqrt{8x-x^2}==\sqrt{16-(x-4)^2}\leq 4$. Возведем обе части уравнения $\sqrt{8x-x^2}=t$ в квадрат: $t^2=16-(x-4)^2\Leftrightarrow(x-4)^2+t^2=16$ - уравнение полуокружности с центром (4;0) и радиусом 4. При $t\in[0;4)$ уравнение $\sqrt{8x-x^2}=t$ имеет два корня, при *t=4* - один корень, при остальных значениях уравнение не имеет решений.

Значит исходное уравнение имеет ровно два различных действительных корня, если уравнение $t^2-(3a-3)t+2a^2-3a=0$ имеет ровно один корень на промежутке $[0;4)$.

Это возможно в следующих случаях:

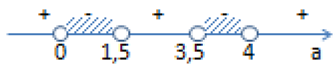
1) Уравнение имеет один корень и он принадлежит $[0;4)$.

$D=9a^2-18a+9-8a^2+12a=a^2-6a+9=0\Rightarrow a=3\Rightarrow t=\dfrac{3a-3}{2}=3\in[0;4)\Rightarrow a=3$ удовлетворяет условию задачи.

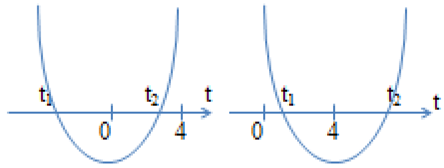
2) Уравнение имеет два корня $(a\neq 3)$, но лишь один принадлежит $(0;4)$. Рассмотрим функцию $f(t)=t^2-(3a-3)t+2a^2-3a$, график парабола ветви вверх. Для выполнения условия необходимо, чтобы:

$f(0)\cdot f(4)\prec 0\Leftrightarrow (2a^2-3a)\cdot(16-4(3a-3)+2a^2-3a)\prec 0\Leftrightarrow$

$a(2a-3)(a-4)(2a-7)\prec 0\Leftrightarrow a\in(0;1{,}5)\cup(3{,}5;4)$.



3) Уравнение имеет два корня $(a\neq 3)$, один равен нулю, а второй не принадлежит $(0;4)$.



Если $t=0\Rightarrow 2a^2-3a=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0, \\ a=1{,}5. \end{array}\right.$

При $a=0\Rightarrow t^2+3t=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0, \\ t=-3\notin(0;4) \end{array}\right.\Rightarrow a=0$ удовлетворяет условию задачи.

При $a=1{,}5\Rightarrow t^2-1{,}5t=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0, \\ t=1{,}5\in(0;4) \end{array}\right.\Rightarrow a=1{,}5$ не удовлетворяет условию задачи.

Объединяя полученные результаты , $a\in[0;1{,}5)\cup\{3\}\cup(3{,}5;4)$.

Ответ: $[0;1{,}5)\cup\{3\}\cup(3{,}5;4)$.

Система упражнений:

1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x-8}=-ax+2+3a$ имеет единственное решение.

2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x-9}=-ax+5a+1{,}5$ имеет единственное решение.

Ответ: $\left\{-\dfrac{1}{8}\right\}\cup\left[0;\dfrac{3}{8}\right]$.

3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x-7}=-ax+5a+1{,}75$ имеет единственное решение.

Ответ: $\left\{-\dfrac{1}{8}\right\}\cup\left[0;\dfrac{7}{8}\right]$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x+a}=\dfrac{x}{4}+3$ имеет два решения.

Ответ: $(8;12]$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $6\sqrt{x+a}=x+6$ имеет два решения.

Ответ: $(-3;6]$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x-2(a-1)\sqrt{x-1}+a+4=0$ имеет единственное решение.

Ответ: $(-\infty;-5]\cup\{4\}$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $2x+1-4\sqrt{2x-x^2}=x^2+a^2+4a$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $\left[-2-\sqrt{5};-2-\sqrt{2}\right]\cup\left[-2+\sqrt{2};-2+\sqrt{5}\right]$.

"Решение систем содержащих иррациональные уравнения"

Пример 9: Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} y=\sqrt{x^2-16}, \\ 3y+5x=a \end{cases}$ **имеет решение.**

Решение: Исходная система равносильна следующей системе

$$\begin{cases} y\ge 0, \\ y^2=x^2-16, \\ x=\dfrac{a}{5}-\dfrac{3y}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0, \\ y^2=\left(\dfrac{a}{5}-\dfrac{3y}{5}\right)^2-16, \\ x=\dfrac{a}{5}-\dfrac{3y}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0, \\ 16y^2+6ay-a^2+400=0, \\ x=\dfrac{a}{5}-\dfrac{3y}{5}. \end{cases}$$

Выясним при каких значениях параметра ***a*** уравнение $16y^2+6ay-a^2+400=0$ имеет корни, т.е.

$D\ge 0.\ \dfrac{D}{4}=9a^2-16\left(400-a^2\right)=25a^2-16\cdot 400,\ 25a^2-16\cdot 400\ge 0 \Leftrightarrow a\in(-\infty;-16]\cup[16;+\infty).$

Теперь выясним при каких значениях параметра **a,** эти корни отрицательные:

$$\begin{cases} D\ge 0, \\ y_1\cdot y_2\succ 0, \\ y_1+y_2\prec 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a\in(-\infty;-16]\cup[16;+\infty), \\ \dfrac{400-a^2}{16}\succ 0, \\ -\dfrac{16a}{16}\prec 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in(-\infty;-16]\cup[16;+\infty), \\ a\in(-20;20), \\ a\succ 0 \end{cases} \Leftrightarrow a[16;20).$$

Из условия когда уравнение имеет корни исключим те, когда эти корни отрицательные, получим значение параметра, при котором квадратное уравнение имеет неотрицательные корни, а следовательно исходная система имеет решение $a\in(-\infty;-16]\cup[20;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-16]\cup[20;+\infty)$.

Пример 10: Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} y=\sqrt{(x-a)^2-16}, \\ 3y=5x \end{cases}$ **имеет одно решение.**

Решение: Из первого уравнения следует, что $y\ge 0 \Rightarrow x\ge 0$. Исходная система равносильна следующей системе

$$\begin{cases} x\ge 0, \\ \dfrac{5x}{3}=\sqrt{(x-a)^2-16} \end{cases} \text{ и после возведения в квадрат } \begin{cases} x\ge 0, \\ 16x^2+18ax-9a^2+144=0. \end{cases}$$

Выясним при каких значениях параметра ***a*** уравнение $16x^2+18ax-9a^2+144=0$ имеет один неотрицательный корень.

Это возможно в следующих случаях:

1) Уравнение имеет один корень и он неотрицательный:

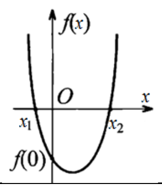
$$\begin{cases} D=0, \\ x_в\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=225a^2-16\cdot 144=0, \\ x_в=-\dfrac{9a}{16}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\pm\dfrac{16}{5}, \\ x_в=-\dfrac{9a}{16}\ge 0 \end{cases}$$

При $a=\dfrac{16}{5}\Rightarrow x_в=-\dfrac{9}{5}\prec 0,$ т.е. нет решений. При $a=-\dfrac{16}{5}\Rightarrow x_в=\dfrac{9}{5}\succ 0,$ т.е. одно решение.

2) Уравнение имеет два корня разных знаков, т.е.

$f(0)\prec 0,\ где\ f(x)=16x^2+18ax-9a^2+144$

$f(0)=-9a^2+144\prec 0 \Leftrightarrow a\in(-\infty;-4)\cup(4;+\infty).$



3) Уравнение имеет два корня, один из которых отрицательный, а второй равен 0,

т.е. $f(0)=0,\ x_1 \prec 0,\ x_2=0.\ f(0)=0 \Leftrightarrow -9a^2+144=0 \Leftrightarrow a=\pm 4.$

При $a=4$ уравнение принимает вид $16x^2+72x=0$ и имеет корни $x=0$ *и* $x=-\dfrac{9}{2}$**,** т.е. одно решение.

При $a=-4$ уравнение принимает вид $16x^2-72x=0$ и имеет корни $x=0$ *и* $x=\dfrac{9}{2}$**,** т.е. два решения.

Объединяя решения всех трех случаев, получим когда исходная система имеет одно решение $a\in(-\infty;-4)\cup[4;+\infty)\cup\left\{-\dfrac{16}{5}\right\}.$

Ответ: $(-\infty;-4)\cup[4;+\infty)\cup\left\{-\dfrac{16}{5}\right\}.$

Пример 11: Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} x+\sqrt{y(2|y|-y)}=0, \\ 2(x-a)^2+x+y=2a+4 \end{cases}$ **имеет единственное решение.**

Решение: В первом уравнении при $y\prec 0 \Rightarrow \sqrt{-3y^2}$, а значит уравнение и система не имеют решения.

При $y\ge 0$ первое уравнение принимает вид $x+y=0,\ \ x=-y.$

И исходная система равносильна следующей системе

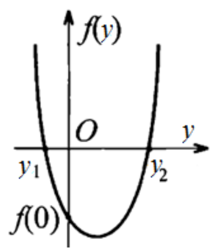
$$\begin{cases} y\ge 0, \\ 2(-y-a)^2-y+y=2a+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0, \\ y^2+2ay+a^2-a-2=0. \end{cases}$$

Выясним при каких значениях параметра ***а*** уравнение $y^2+2ay+a^2-a-2=0$ имеет один неотрицательный корень.

Это возможно в следующих случаях:

1) Уравнение имеет один корень и он неотрицательный:

$$\begin{cases} D=0, \\ y_в\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=a+2=0, \\ y_в=-a\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2, \\ y_в=2\succ 0 \end{cases}$$



При $a=-2$ одно решение.

2) Уравнение имеет два корня разных знаков, т.е.

$f(0)\prec 0,$ *где* $f(x)=y^2+2ay+a^2-a-2\ \ f(0)=a^2-a-2\prec 0 \Leftrightarrow a\in(-1;2).$

3) Уравнение имеет два корня, один из которых отрицательный, а второй равен 0, т.е.

$f(0)=0,\ y_1\prec 0,\ y_2=0.\ \ f(0)=0 \Leftrightarrow a^2-a-2=0 \Leftrightarrow a=-1;2.$

При $a=-1$ уравнение принимает вид $y^2-2y=0$ и имеет корни $y=0$ *и* $y=2$**,** т.е. два решения.

При $a=2$ уравнение принимает вид $y^2+4y=0$ и имеет корни $y=0$ *и* $y=-4$**,** т.е. одно решение.

Объединяя решения всех трех случаев, получим когда исходная система имеет одно решение $a\in\{-2\}\cup(-1;2].$

Ответ: $\{-2\}\cup(-1;2].$

Система упражнений:

1. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} y=\sqrt{x^2-16}, \\ 3y-5x-a=0 \end{cases}$ имеет решение.

Ответ: $(-\infty;-16]\cup[20;+\infty).$

2. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} y=\sqrt{x^2-8x}, \\ 5x-3y+a=20 \end{cases}$ имеет решение.

Ответ: $(-\infty;-16]\cup[20;+\infty).$

3. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} y=\sqrt{9+8x-x^2}, \\ x=a(y+3) \end{cases}$ имеет решение.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3};3\right]$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} y=\sqrt{(x-a)^2-9}, \\ 4y=5x \end{cases}$ имеет одно решение.

Ответ: $(-\infty;-3)\cup\left\{-\frac{9}{5}\right\}\cup[3;+\infty)$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} y=\sqrt{x^2+6x}, \\ 5x+4y+a+15=0 \end{cases}$ имеет одно решение.

Ответ: $(-\infty;-15]\cup[15;+\infty)$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} y=\sqrt{16-6x-x^2}, \\ x=a(y-4) \end{cases}$ имеет единственное решение.

Ответ: $\left\{-\frac{4}{3}\right\}\cup\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} x=\sqrt{y(2|y|-y)}, \\ y+2(x+a)^2=x+2a+4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Ответ: $\{-2\}\cup(-1;2]$.

8. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} y=\sqrt{2(|x|+x)}, \\ x=a(y-1) \end{cases}$ имеет единственное решение.

Ответ: $(-\infty;1)$.

Пример 12: Найдите все положительные значения параметра a, при которых система $\begin{cases} \sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4ay-a^2y^2}, \\ y=x^2 \end{cases}$ имеет ровно три различных решения. (ЕГЭ 2020)

Решение: Преобразуем первое уравнение системы $\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4ay-a^2y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-x^2=4ay-a^2y^2, \\ 4x-x^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (ay-x)(ay+x-4)=0, \\ 0\le x\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} ay-x=0 \\ ay+x-4=0. \end{array}\right. \\ 0\le x\le 4 \end{cases}$$

Исходная система равносильна следующей совокупности $\begin{cases} \sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4ay-a^{2y^2}}, \\ y=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} ay+x-4=0 \\ y=x^2 \\ 0\le x\le 4 \end{cases} \\ \begin{cases} ay-x=0 \\ y=x^2 \\ 0\le x\le 4 \end{cases} \end{array}\right.$

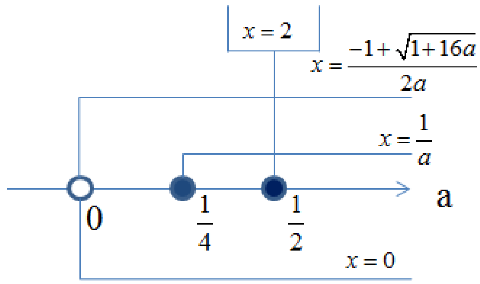
Рассмотрим решение первой системы $\begin{cases} ay + x - 4 = 0, \\ y = x^2, \\ 0 \le x \le 4. \end{cases}$ При положительных значения параметра ***a*** уравнение $ay + x - 4 = 0$ принимает вид $ax^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+16a}}{2a}$. Так как $a \succ 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1-\sqrt{1+16a}}{2a} \prec 0$. Выясним когда второй корень удовлетворяет условию

$$0 \le \frac{-1+\sqrt{1+16a}}{2a} \le 4 \Leftrightarrow 1 \le \sqrt{1+16a} \le 8a+1 \Leftrightarrow 0 \le 16a \le (8a+1)^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ a^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow a \succ 0.$$

Рассмотрим решение второй системы $\begin{cases} ay - x = 0, \\ y = x^2, \\ 0 \le x \le 4. \end{cases}$ При положительных значения параметра ***a*** уравнение $ay - x = 0$ принимает вид $ax^2 - x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{a} \end{array} \right.$. Для $x = 0$ выполняется условие $0 \le x \le 4$. Выясним когда второй корень удовлетворяет условию $0 \le \dfrac{1}{a} \le 4 \Leftrightarrow a \ge \dfrac{1}{4}$.

Корни $x = \dfrac{-1+\sqrt{1+16a}}{2a}$ *и* $x = \dfrac{1}{a}$ при положительных значениях параметра ***a*** не равны нулю, Выясним, при каких значениях ***a*** они совпадают:

$$\frac{-1+\sqrt{1+16a}}{2a} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \sqrt{1+16a} = 3 \Leftrightarrow 1+16a = 9 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$



Имеем при $a \succ 0$ $x = \dfrac{-1+\sqrt{1+16a}}{2a}$, $a \ge \dfrac{1}{4}$ $x = \dfrac{1}{a}$, $a \succ 0$ $x = 0$.

Исходная система имеет ровно три различных решения при

$a \in \left[\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left[\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Система упражнений:

1. Найдите все положительные значения параметра a, при которых система $\begin{cases} \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{2ay - a^2y^2}, \\ y = x^2 \end{cases}$ имеет ровно три различных решения.

Ответ: $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

2. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} \sqrt{9 - y^2} = \sqrt{9 - a^2x^2}, \\ y^2 + x^2 = -6x + 3y \end{cases}$ имеет ровно три различных решения.

Ответ: $a \in \left[-\dfrac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \dfrac{1}{2}\right]$

3. Найдите все значения параметра $a,$ при которых система уравнений $\begin{cases} \sqrt{4-y^2} = \sqrt{4-a^2x^2}, \\ y^2 + x^2 = 4x + 2y \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup \{0\} \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$

4. Найдите все значения параметра $a,$ при которых система уравнений $\begin{cases} \sqrt{16-y^2} = \sqrt{16-a^2x^2}, \\ y^2 + x^2 = 8x + 4y \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup \{0\} \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$

5. Найдите все значения параметра $a,$ при которых система уравнений $\begin{cases} \sqrt{4-y^2} = \sqrt{4-4x^2}, \\ xy + a^2 = ax + ay \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a \in [-2; -1) \cup (1; 2]$