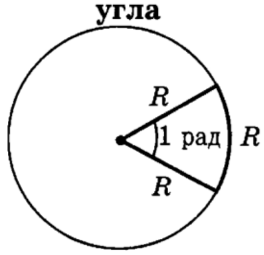
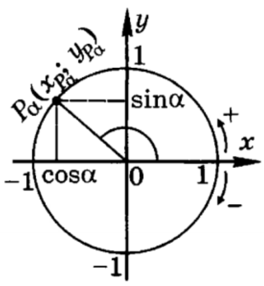
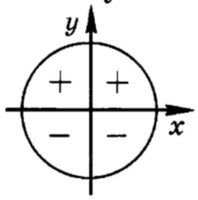
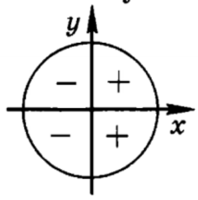
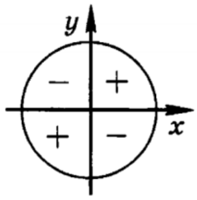
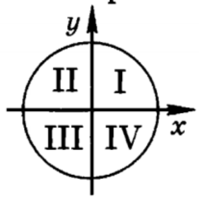
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

Синус, косинус, тангенс и котангенс (повторение)

Радианная мера угла 	**Углом в 1 радиан** называется центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности. Градусная мера угла ($n°$) и радианная мера угла (α рад[1]) связаны соотношением: $$\frac{n°}{180°}=\frac{\alpha}{\pi}.$$
Типовое задание	*Выразите величины углов* – *в радианной мере: а)* 45°; *б)* 270°; – *в градусной мере: в)* $\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{8\pi}{5}$.

Определение и свойства тригонометрических функций	Формулы[2] и свойства	Примеры применения
I. Определение тригонометрических функций	$\sin\alpha = y_{P_\alpha}$ $\cos\alpha = x_{P_\alpha}$	*Существуют ли числа* α, β, γ, *для которых* $\sin\alpha = 0{,}05$, $\cos\beta = -\sqrt{5}$, $\mathrm{tg}\gamma = -2005$?
	$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y_{P_\alpha}}{x_{P_\alpha}}$ $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{x_{P_\alpha}}{y_{P_\alpha}}$	*Решение.*

II. Знаки тригонометрических функций	**Знаки синуса**  **Знаки косинуса**  **Знаки тангенса и котангенса**  **Номера четвертей**  	*Сравните с нулем значение выражения* $\dfrac{\sin 150^\circ \cdot \cos(-20^\circ)}{\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{5}}$. *Решение.*
III. Четность-нечетность	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ – нечетная $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ – четная $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ – нечетная $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ – нечетная	*Упростите выражение* $\dfrac{\sin(-\alpha)\cdot\cos(-\alpha)}{\operatorname{tg}(-\alpha)}$. *Решение.*
IV. Периодичность	$\sin(\alpha \pm 2\pi n) = \sin\alpha$ $\cos(\alpha \pm 2\pi n) = \cos\alpha$ $\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi n) = \operatorname{tg}\alpha$ $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha$ $n \in \boldsymbol{Z}$	*Вычислите:* *а)* $\cos\dfrac{17\pi}{4}$; *б)* $\operatorname{tg}(-210^\circ)$. *Решение.*
VI. Основные тригонометрические тождества	1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 2) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 3) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ 4) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$ 5) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ 6) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$	*Найдите значения косинуса, синуса и котангенса угла* α, *если* $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{5}{12}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. *Решение.*

VII. Формулы приведения 	$f_{триг}\left(\frac{\pi n}{2}\pm\alpha\right)=$ $=\begin{cases}\pm f_{триг}\alpha, & n-\textit{четное},\\ \pm cof_{триг}\alpha, & n-\textit{нечетное}.\end{cases}$ **Перед приведенной функцией[1] ставится тот знак, который имеет исходная функция в той координатной четверти, к которой относится угол $\frac{\pi n}{2}\pm\alpha$, если считать α «маленьким» углом (углом первой четверти).**	*Упростите выражения:* *а)* $\cos(\pi+\alpha)$; *б)* $\mathrm{tg}\left(270^\circ-\alpha\right)$. *Решение.*
VIII. Формулы сложения	1) $\cos(\alpha-\beta)=$ $=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 2) $\cos(\alpha+\beta)=$ $=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 3) $\sin(\alpha-\beta)=$ $=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ 4) $\sin(\alpha+\beta)=$ $=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 5) $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$ 6) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$	*Вычислите* $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$, *если* $\mathrm{ctg}\alpha=2$, $\mathrm{tg}\beta=3$. *Решение.*
IX. Формулы двойного угла	1) $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ 2) $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ или $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ или $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ 3) $\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$	*Найдите* $\sin2\alpha$ *и* $\cos2\alpha$, *если* $\sin\alpha=0{,}6$; $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$. *Решение.*

X. Формулы понижения степени. Формулы половинного угла	1) $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$ 2) $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$ 3) $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ **или** $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ 4) $\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$ **или** $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$	*Упростите выражение* $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$. ***Решение.*** *Найдите* $\mathrm{tg}\frac{7\pi}{12}$. ***Решение.***
XI. Формулы суммы и разности	1) $\sin\alpha+\sin\beta=$ $=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 2) $\sin\alpha-\sin\beta=$ $=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ 3) $\cos\alpha+\cos\beta=$ $=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 4) $\cos\alpha-\cos\beta=$ $=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	*Докажите тождество* $\frac{\sin 2\alpha-\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}=\mathrm{tg}\,3\alpha$. ***Решение.***
	5) $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ 6) $\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$	

XII*[1]. Формулы преобразования произведения в сумму	1) $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)$ 2) $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right)$ 3) $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y)+\sin(x+y)\right)$	*Вычислите*: $2\cos20°\cos40° - \sin70°$. *Решение.* *Ответ*: 0,5.
XIII*. Формулы тройного угла	1) $\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ 2) $\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ 3) $\mathrm{tg}3\alpha = \frac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}$ 4) $\mathrm{ctg}3\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^3\alpha - 3\mathrm{ctg}\alpha}{3\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}$	*Докажите тождество* $\frac{\sin^3\alpha + \sin3\alpha}{\cos^3\alpha - \cos3\alpha} = \mathrm{ctg}\,\alpha$. *Решение.*
XIV*. Универсальная тригонометрическая подстановка	1) $\sin\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ 2) $\cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ 3) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ 4) $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$	*Найдите* $\cos2\alpha$, *если* $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$. *Решение.* *Ответ*: −0,28.
Типовое задание	*Докажите тождество*: *а*) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$; *б*) $\sin\alpha\sin\beta(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta) = \sin(\alpha+\beta)$. *Решение.*	

Типовое задание	*Упростите выражение*: $$\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{2}-6\alpha\right)+\sin(\pi+4\alpha)+\sin(3\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}+6\alpha\right)+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos(\alpha+2\pi)}.$$ *Решение.*

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha$.

Типовое задание	*Вычислите*: *а*) $\operatorname{tg}15°$; *б*) $\cos(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=-0{,}8$; $\cos\beta=0{,}8$; $180°<\alpha<270°$; $270°<\beta<360°$. *Решение.*

Ответ: *а*) $2-\sqrt{3}$; *б*) $-0{,}96$.