Из опыта преподавания курса «Теория вероятности».
От простых задач к сложным.

Верещагина О. Г.

Что такое «вероятность» простыми словами

Вся жизнь состоит из случайных событий, которые могут либо произойти, либо нет. Например, сегодня Вы идете на экзамен, по которому лучше остальных знаете один билет, достанется он именно Вам или нет – случайность. Так как билетов всего 40, а Вам нужно вытянуть всего 1, можем определить вероятность, с которой Вам достанется желаемый билет. Эта вероятность будет составлять 1 шанс к 40 возможным, т. е. 1 к 40 или 1/40 или 0,025.

Формула вероятности

Формула для вычисления вероятности события выглядит следующим образом: P=m/n, где P – вероятность события; m — число вариантов, которые нас устраивают (число благоприятных исходов); n – общее количество вариантов (возможных исходов). Логично, что число благоприятных исходов всегда меньше, чем общее количество исходов, т.е. меньшее число мы делим на большее. Таким образом вероятность всегда находится в диапазоне от 0 до 1.

Задача 1

У нас есть пакет, в котором лежит 15 шариков, 9 из которых фиолетового цвета, а остальные белые. Какова вероятность вытащить из пакета один белый шарик?

Решение: Количество белых шариков 15 – 9 = 6 штук, следовательно, количество благоприятных исходов нашего события – 6. Общее количество возможных исходов – 15. Подставляем в формулу и получаем: P=6/15=25

Таким образом, вероятность вытащить белый шарик равна 0,4.

Задачи на вероятность нужно читать очень внимательно, чтобы не допускать досадных ошибок.

Например, вот в такой задаче:

Задача 2

В автомате, продающем маленькие мячики, есть мячи 5 цветов: 21 синих, 40 красных, 15 зеленых, 8 белых, а остальные желтые. Всего в автомате 100 мячиков. Какова вероятность, что Матвею достанется мяч не синего цвета?

Решение: Сразу обращаем внимание на то, что Матвею должен достаться мяч НЕ синего цвета, а любого другого. Многие ученики просто не замечают частицу НЕ и ищут вероятность выпадения именно синего мяча, и, естественно, допускают ошибку. Итак, общее количество возможных вариантов – 100. Нужен любой мяч, кроме синего. Следовательно, количество вариантов, когда выпадет не синий мяч: 100 – 21 = 79. Таким образом, вероятность того, что выпадет мячик любого цвета, кроме синего, равна P=79/100=0,79.

Разберем еще задачу.

Задача 3

На конкурсе выступают 11 участников из Казани, 6 участников из Нижнего Новгорода, 3 участника из Москвы и 7 участников из Твери. Порядок

выступления в конкурсе определяется жеребьевкой. Какова вероятность того, что последним будем выступать конкурсант из Нижнего Новгорода? Результат округлите до сотых.
Решение: Всего выступает 27 конкурсантов (n = 27). Представим, что все конкурсанты подошли к барабану, где лежат номерки и тянут по одному номерку. Нас интересует, какова вероятность того, что один из конкурсантов из Нижнего Новгорода вытянет номерок с цифрой 27. Конкурсантов из Нижнего Новгорода всего 6, следовательно, m = 6. Таким образом, вероятность будет равна: P=6/27. Как представить в виде десятичной дроби? Нужно разделить 6 на 27 уголком, тогда Вы получите 0,222… или округляя до сотых 0,22. Ответ: 0,22.

Как решать задачи с перечислением

Этот тип задач отличается от предыдущих лишь тем, что в задаче предметы поименованы. А вычисления выполняются по той же формуле: $P=m/n$, где P – вероятность события; m – число вариантов, которые нас устраивают (число благоприятных исходов); n – общее количество вариантов (возможных исходов).
Вот пример такой задачи.

Задача 4

В рюкзаке у Егора лежат учебники по алгебре, геометрии, химии, биологии и литературе. Егор не глядя вынимает один учебник, какова вероятность того, что он вытянул учебник по геометрии?
Решение: Несмотря на то, что теперь предметы поименованы, принцип решения задачи остался прежним. Общее количество вариантов (т.е. учебников в портфеле) – 5. Нужный нам вариант (т.е. учебник по геометрии) – 1. Следовательно, вероятность нужного нам события равна:
P =1/5=$0{,}2$
Ответ: 0,2.

Как решать задачи с фиксированными элементами

Задачи на вероятность с фиксированными элементами сводятся к стандартным задачам на вероятность, но из элементов m и n нужно вычесть 1.

Задача 5

В соревнованиях по боксу участвуют 73 участника. Из них 25 участников из Нижнего Новгорода, в том числе К. Мишин. На пары участники разбиваются с помощью жеребьевки. Какова вероятность того, что противником К. Мишина станет участник из Нижнего Новгорода? Результат округлите до сотых.
Решение: в этой задаче есть фиксированный элемент – К. Мишин. Этот фиксированный элемент мы должны вычесть из элементов m и n. Итак, общее количество участников – 73. Но К. Мишин у нас уже выбран, поэтому он не участвует в жеребьевке. Следовательно, его надо исключить из общего количества и получаем n = 72.
Нас интересуют только участники из Нижнего Новгорода, их 25. Но опять же К. Мишин у нас уже выбран, поэтому он не участвует в жеребьевке.

Следовательно, количество устраивающих нас вариантов m = 24. А теперь считаем по нашей формуле: P=24/72=1/3=0,3333..

Таким образом, вероятность того, что противником К. Мишина станет участник из Нижнего Новгорода равна 0,33. Итак, если в задаче есть фиксированный элемент, то мы вычитаем единицу из m и n, а дальше решаем задачу по стандартной формуле нахождения вероятности.

Независимые события в теории вероятностей

Если вероятность появления одного события не зависит от появления другого события, и наоборот, то такие события называются независимыми. Если события независимые, то их вероятности перемножаются. В результате этого мы получаем вероятность возникновения этих событий одновременно.

Рассмотрим задачи с независимыми событиями.

Задача 6

Стрелок Степан стреляет 6 раз по мишеням. Вероятность попадания Степана в мишень при каждом выстреле равна 0,8. Какова вероятность того, что стрелок попадет в мишень все 6 раз подряд? Результат округлите до сотых.

Решение: в задаче происходит 6 независимых событий – 6 выстрелов. Вероятность каждого из них – 0,8. Чтобы найти вероятность возникновения этих независимых событий одновременно необходимо перемножить вероятности этих событий.

$P = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,262144$

Округляем результат до сотых и получаем 0,26.

Итак, вероятность того, что стрелок попадет в мишень все 6 раз подряд, равна 0,26.

Рассмотрим еще одну задачу, чуть сложнее.

Задача 7

Стрелок Степан стреляет 6 раз по мишеням. Вероятность попадания Степана в мишень при каждом выстреле равна 0,8. Какова вероятность того, что стрелок первые 2 раза промахнется, а остальные 4 раза попадет в цель? Результат округлите до сотых.

Решение. В задаче происходит 6 независимых событий – 6 выстрелов. Вероятность того, что Степан попадет в мишень, равна 0,8. Тогда вероятность того, что не попадет в мишень, равна 1 – 0,8 = 0,2. Нам нужно найти вероятность, когда стрелок два раза промахнется, а потом четыре раза попадет. Перемножаем соответствующие вероятности:

$P = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,016384$

Округляем 0,016384 до сотых и получаем 0,02.

Итак, вероятность того, что Степан два раза промахнется, а потом четыре раза попадет, равна 0,02.

Задача 8

В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров, во втором – 3 белых и 9 черных шаров, в третьем – 6 белых и 6 черных шаров. Из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что все вынутые шары белые.

Решение. Событие A – вынут белый шар из первого ящика, B – из второго ящика, C – из третьего. Тогда $P(A)$ = 2/12=1/6; $P(B)$ =3/12 =1/4; $P(C)$ =

6/12=1/2. Событие ABC – все вынутые шары – белые. События A, B, C – независимые, поэтому

$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ = 1/6 ·1/4 ·1/2= 1/48≈ *0,02*

Число сочетаний из n по m

Задача 9

Пелагее нужно выбрать из 8 книг по биологии 2 книги. Сколькими способами она может это сделать?

Понятно, что здесь может быть большое количество вариантов сочетаний книг. Чтобы вычислить их количество нужно знать формулу числа сочетаний из n по m:

$C_n^m = n!/m!(n-m)!$, где C – это число сочетаний;

n – количество элементов, из которого нужно выбрать;

m – количество элементов, которое нужно выбрать.

В формуле присутствует факториал. Записывается факториал следующим образом: *n! 5!, 7!* Факториал – это произведение всех натуральных чисел от 1 до основания факториала. Основание факториала – это число, которое стоит перед знаком «!». Т.е. факториал 5! имеет основание 5 и найти его можно следующим образом:

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$

А факториал *n!* имеет основание n:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$

Часто ученики путают, что вставить внизу, а что наверху, т. е. меняют n и m местами. Применительно к нашей задаче можно перепутать, что ставить наверху: 2 или 8. Запомнить, что ставить наверху, а что внизу – легко. Сверху всегда стоит наименьшее число, т. е. в нашем случае – это 2.

Давайте вернемся к нашей задаче. Применяем формулу и получаем:

C_8^2=8!/2!(8–2)!=(1·2·3·4·5·6·7·8)/(1·2)·(1·2·3·4·5·6)=(7·8)/2. Обратите внимание, что не нужно умножать в числителе все натуральные числа от 1 до 8, у Вас это отнимет очень много времени. Достаточно подробно расписать числитель и знаменатель, сделать сокращение и все легко считается. Итак, Пелагея может выбрать книги по биологии 28 способами.

Задача 10

Из 15 школьников нужно отправить 2 учеников на дежурство. Сколькими способами можно это сделать? Решение. Применим формулу: $C_n^m = n!/m!(n-m)!$

C_{15}^2=15!/2!(15–2)!=15!/1·2·13!=14·15/2 =7·15=105.

Итак, из 15 школьников выбрать 2 дежурных можно 105 способами.

Теперь Вы можете приступить к практике, ведь только большое количество тренировок позволит Вам успешно справиться с заданиями по теории вероятности.

Задача 11

Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 7 человек, можно составить из 15 преподавателей?

Решение. Искомое число комиссий (без учета порядка) – это число сочетаний из 15 по 7:

C_{15}^{7}=15!/7!·8!=(15·14·13·12·11·10·9)/(1·2·3·4·5·6·7)=*6435*

Задача 12

На экзамене студенту предлагается 30 билетов; в каждом билете два вопроса. Из 60 вопросов, вошедших в билеты, студент знает только 40. Найти вероятность того, что взятый студентом билет будет состоять

1) из известных ему вопросов;

2) из неизвестных ему вопросов;

3) из одного известного и одного неизвестного вопроса.

Решение. Пусть *A* – событие, состоящее в том, что на оба вопроса студент знает ответ; *B* – не знает ответа на оба вопроса; *C* – на один вопрос знает ответ, на другой – не знает. Выбор двух вопросов из 60 можно осуществить n = C_{60}^{2}=60·59/2=1770 способами.

1. Имеется m =C_{40}^{2}=40·39/2=780 возможностей выбора известных студенту вопросов. Тогда *P (A)* =780/1770 ≈ *0, 44.*

2. Выбор двух неизвестных вопросов из 20 можно осуществить m = C_{20}^{2}=20·19/2=*190* способами. В таком случае *P (B)* = 190/1770 ≈*0, 11.*

3. Существует $m = C_{40}^{1} \cdot C_{20}^{1}$ = *40 · 20 = 800* способов выбрать билет с одним известным и одним неизвестным вопросом. Тогда *P (C)* = 800/1770≈ *0, 45.*

Формула полной вероятности и формула Байеса.

Формула сложения вероятностей совместных событий: *P (A U B) =P(A) + P(B) – P(A∩B).*

Задача 13

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение. Рассмотрим событие *A* = кофе закончится в первом автомате, *B* = кофе закончится во втором автомате. Вероятность того, что кофе останется в первом автомате равна 1 − 0,3 = 0,7. Вероятность того, что кофе останется во втором автомате равна 1 − 0,3 = 0,7. Вероятность того, что кофе останется в первом или втором автомате равна 1 − 0,12 = 0,88. Поскольку

P (A U B) = P(A) + P(B) − P(A∩B), имеем: 0,88 = 0,7 + 0,7 − p, откуда искомая вероятность p = 0,52.

Задача 14

Вероятность того, что будет снег (событие *A*), равна 0,6, а того, что будет дождь (событие *B*), равна 0,45. Найти вероятность плохой погоды, если вероятность дождя со снегом (событие *AB*) равна 0, 25. Решение**:** События *A* и *B* совместны, поэтому

P (A + B) =P(A) + P(B) - P(AB) = 0,6 + 0,45 – 0,25 = 0,8

Задача 15

Обследовалась группа из 10000 человек в возрасте свыше 60 лет. Оказалось, что 4000 человек являются постоянно курящими. У 1800 курящих обнаружились серьезные изменения в легких. Среди некурящего изменения в легких имели 1500 человек. Какова вероятность того, что наугад обследованный человек, имеющий изменения в легких, является курящим? Результат округлить до сотых.

Решение. Рассмотрим событие *A*=обследованный является постоянно курящим, *B* — является некурящим. Тогда по условию задачи

P(A)= 4000/10000*=0,4, P(B)* = 6000/10000*=0,6, P* = 1800/4000 = *0,45, P* = 1500/4000 = *0,25.*

P = 0,4·0,45+0,6·0,25=0,33 (по формуле полной вероятности). Искомая вероятность того, что обследованный человек является курящим, по формуле Байеса равна *P =* (0,4·0,45)/0,33 = *0,55.*

Задача 16

В продажу поступают телевизоры трех заводов: 30% с первого завода, 20% – со второго, 50% – с третьего. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второго – 10%, третьего – 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор?

Решение: Рассмотрим события: *А* – приобретен исправный телевизор; гипотезы *H1, H2, H3* – телевизор поступил в продажу соответственно с первого, второго, третьего завода. По условию задачи *P(H1)* = 30100=0,3; *P(H2)* = 20/100 = *0,2; P(H3)* = 50/100 = *0,5.*

P (A | H1) = 80/100 = *0,8; P (A | H2)* = 90/100 = *0,9;*

P (A | H3) = 95/100 = *0,95.*

По формуле полной вероятности находим

P(A) = P(H1) · P(A | H1) + P(H2) · P(A | H2) + P(H3) · P(A | H3) = 0,3 · 0,8 + 0,2 · 0,9 + 0,5 · 0,95 = 0,895.

Задача 17

В машину «Экзаменатор» введено 50 вопросов. Студенту предлагается 5 вопросов и ставится оценка «отлично», если на все вопросы получен верный ответ. Найти вероятность получить «отлично», если студент подготовил только 40 вопросов.

Решение. *A* – {ПОЛУЧЕНА ОЦЕНКА «ОТЛИЧНО»}, *Ai* – {ОТВЕТИЛ НА *i*-й ВОПРОС}. Тогда

A = A1A2A3A4A5, имеем: *P (A) = P (A1) · P (A2 | A1) · P (A3 | A1A2) · P (A4 | A1A2A3) · P (A5 | A1A2A3A4)* =40/50·39/49·38/48·37/47·36/46≈0, 31

Задачи для самостоятельного решения

1. На борту самолета 12 кресел расположены рядом с запасными выходами и 18 — за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолете 300 мест.
2. На олимпиаде по русскому языку 250 участников разместили в трех аудиториях. В первых двух удалось разместить по 120 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.
3. В классе 26 обучающихся, среди них два друга – Андрей и Сергей. Обучающихся случайным образом разбивают на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

4. В фирме такси в наличии 50 легковых автомобилей; 27 из них черного цвета с желтыми надписями на бортах, остальные — желтого цвета с черными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина желтого цвета с черными надписями.
5. За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.
6. Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.
7. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.
8. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.
9. В одном ресторане в г. Тамбове администратор предлагает гостям сыграть в «Шеш-беш»: гость бросает одновременно две игральные кости. Если он выбросит комбинацию 5 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплемент от ресторана: чашку кофе или десерт бесплатно. Какова вероятность получить комплемент? Результат округлите до сотых.
10. Платежный терминал в течение рабочего дня может выйти из строя. Вероятность этого события 0,07. В торговом центре независимо друг от друга работают два таких платежных терминала. Найдите вероятность того, что, хотя бы один из них в течение рабочего дня будет исправен