Примеры основных заданий и их решения

1. На единичной окружности отметьте точку, получаемую поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол:

а) $50°$; б) $-220°$; в) $-90°$; г) $190°$.

Решение. а) Точку $P_{50°}$ получаем поворотом **против** часовой стрелки точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол $50°$ (рис. 15, *а*).

б) Точку $P_{-220°}$ получаем поворотом **по** часовой стрелке точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол $220°$ (см. рис. 15, *а*).

в) Точку $P_{-90°}$ получаем поворотом **по** часовой стрелке точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол $90°$ (рис. 15, *б*).

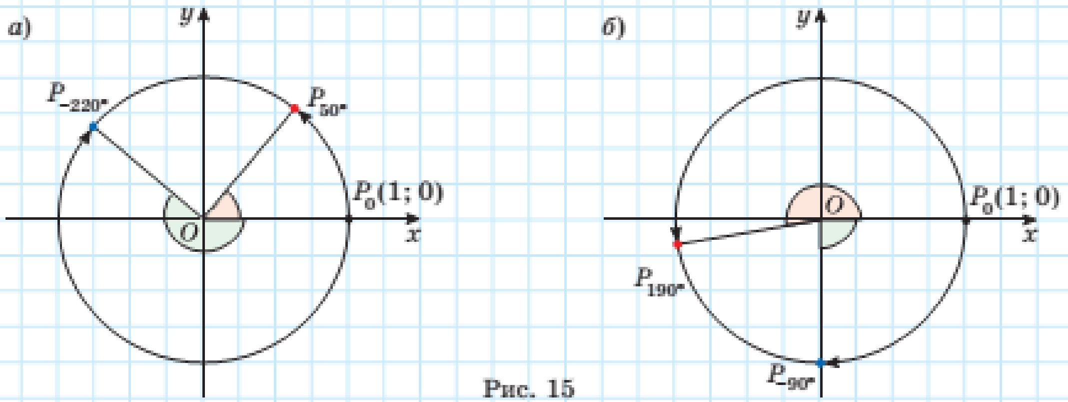

Рис. 15

г) Точку $P_{190°}$ получаем поворотом **против** часовой стрелки точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол $190°$ (см. рис. 15, *б*).

2. Покажите, что точки:

а) $P_{40°}$ и $P_{400°}$; б) $P_{-10°}$ и $P_{-730°}$ — единичной окружности совпадают.

Решение. а) Поскольку $400° = 360° + 40°$, то, для того чтобы получить точку $P_{400°}$, нужно выполнить один полный оборот и еще поворот точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат против часовой стрелки на угол $40°$ (рис. 16, *а*).

б) $-730° = -360° \cdot 2 + (-10°)$ (рис. 16, *б*).

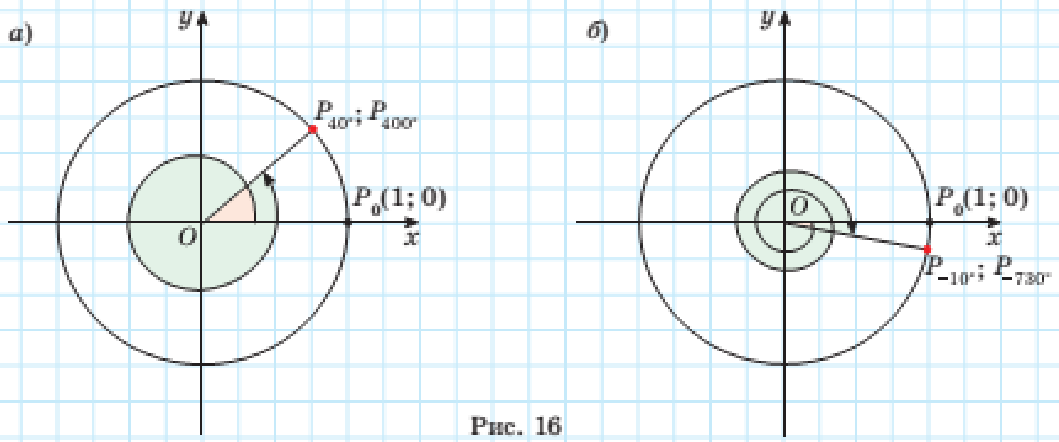

Рис. 16

3. На единичной окружности отметьте точку, получаемую поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на угол:

а) $550°$; б) $-1300°$.

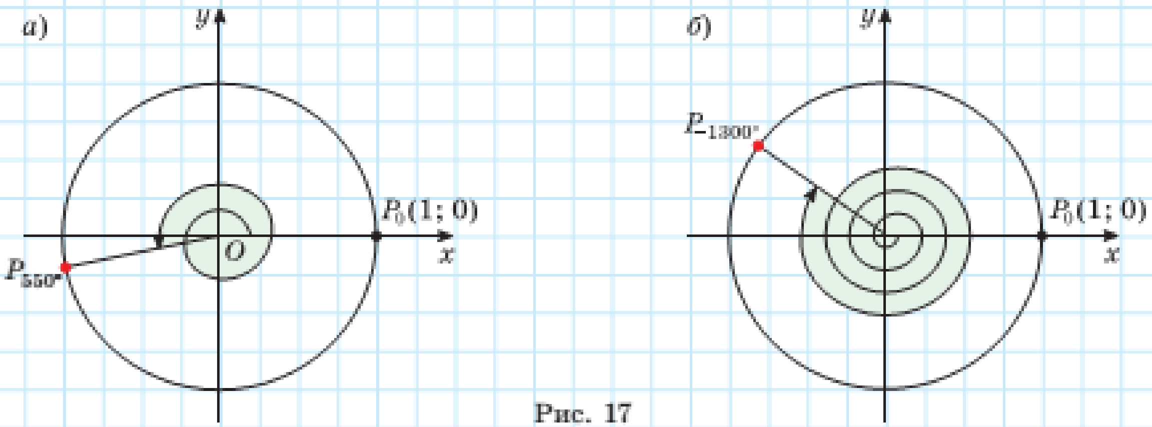

Рис. 17

Решение. а) Так как $550° = 360° + 190°$, то выполним один полный оборот и еще поворот точки $P_0(1;\,0)$ вокруг начала координат против часовой стрелки на угол $190°$ (рис. 17, *а*).

б) Так как $-1300° = -360° \cdot 3 + (-220°)$, то выполним три полных оборота и еще поворот точки $P_0(1;\,0)$ вокруг начала координат по часовой стрелке на угол $220°$ (рис. 17, *б*).

4. Запишите все углы α, для которых точка P_α совпадает с точкой:
а) $P_{90°}$; б) $P_{-217°}$.

Решение. а) Отметим на единичной окружности точку $P_{90°}$. Так как, например, $450° = 90° + 360°$, $810° = 90° + 2 \cdot 360°$, $-270° = 90° - 360°$ и т. п., то точки единичной окружности $P_{450°}$, $P_{810°}$, $P_{-270°}$ совпадают с точкой $P_{90°}$ единичной окружности. Очевидно, что существует бесконечно много углов α, для которых точки единичной окружности P_α и $P_{90°}$ совпадают. Эти углы могут быть получены в результате поворота точки $P_{90°}$ на целое число полных оборотов по или против часовой стрелки (рис. 18), таким образом, $\alpha = 90° + 360° \cdot n$, $n \in \mathbf{Z}$.

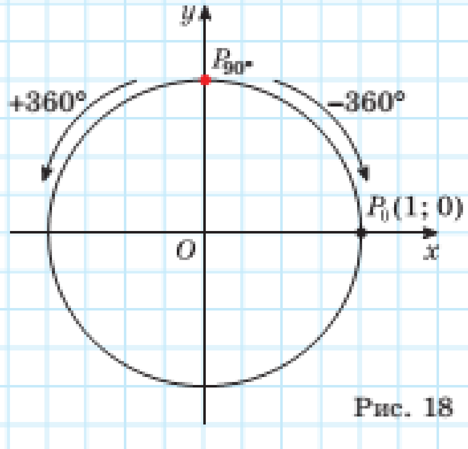

Рис. 18

б) $\alpha = -217° + 360° \cdot n$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. Выразите в радианах угол:
а) $150°$; б) $20°$; в) $-80°$; г) $2000°$.

Решение.

а) $150° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{5\pi}{6}$; б) $20° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{9}$;

в) $-80° \cdot \frac{\pi}{180°} = -\frac{4\pi}{9}$; г) $2000° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{100\pi}{9}$.

6. Выразите в градусах угол:

а) $\frac{\pi}{2}$; б) $-\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{7\pi}{18}$; г) $\frac{4\pi}{3}$; д) 4; е) −3.

Решение.

а) $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{180°}{\pi} = 90°$; б) $-\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = -45°$;

в) $\frac{7\pi}{18} = \frac{7\pi}{18} \cdot \frac{180°}{\pi} = 70°$; г) $\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 240°$;

д) 4 рад $\approx 4 \cdot 57° = 228°$; е) -3 рад $\approx -3 \cdot 57° = -171°$.

7. На единичной окружности отметьте точку, получаемую поворотом точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат на угол:

а) $\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{13\pi}{6}$.

Решение. а) Так как $\frac{5\pi}{6} = 150°$, то выполним поворот точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат на угол 150° (рис. 19, *а*).

б) Поскольку $\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$, то точка $P_{\frac{13\pi}{6}}$ совпадает с точкой $P_{\frac{\pi}{6}}$ (рис. 19, *б*).

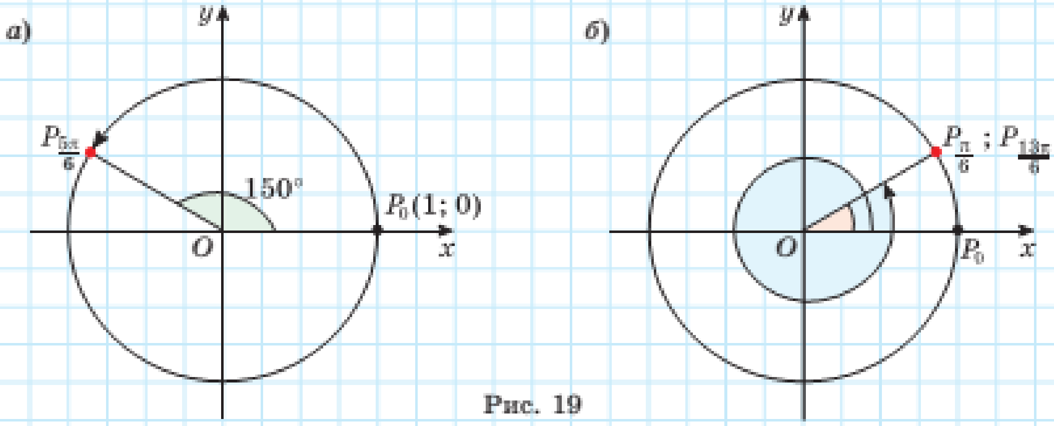

Рис. 19

Примеры основных заданий и их решения

1. Точка P_α единичной окружности имеет координаты $P_\alpha\left(\frac{1}{5}; -\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$. Используя определение синуса и косинуса произвольного угла, найдите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Решение. Синусом угла α называется ордината точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1; 0)$ единичной окружности вокруг начала координат на угол α. По условию ордината точки P_α равна $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$, значит, $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Косинусом угла α называется абсцисса точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ единичной окружности вокруг начала координат на угол α. По условию абсцисса точки P_α равна $\frac{1}{5}$, значит, $\cos\alpha = \frac{1}{5}$.

2. Если $\sin\alpha = -1$, то угол α может быть равен:

а) $180°$; б) $90°$; в) $-90°$;
г) $-180°$; д) $-270°$.

Выберите правильный ответ.

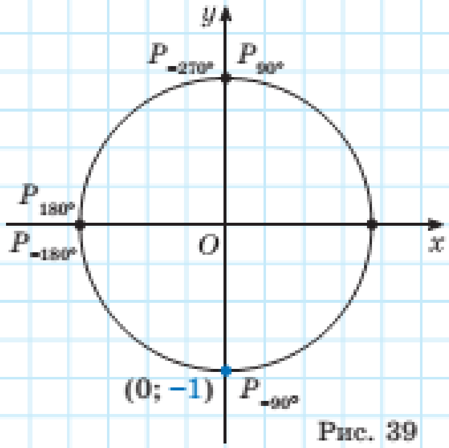

Рис. 39

Решение. Так как синусом угла α называется ордината точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ единичной окружности вокруг начала координат на угол α, то нужно найти точку единичной окружности, ордината которой равна -1. Эта точка лежит на оси ординат, и из данных углов ей соответствует угол $\alpha = -90°$ (рис. 39). Правильный ответ в).

3. Если $\cos\alpha = 0$, то угол α может быть равен:

а) $180°$ б) $360°$; в) $450°$;
г) $900°$; д) $-360°$.

Выберите правильный ответ.

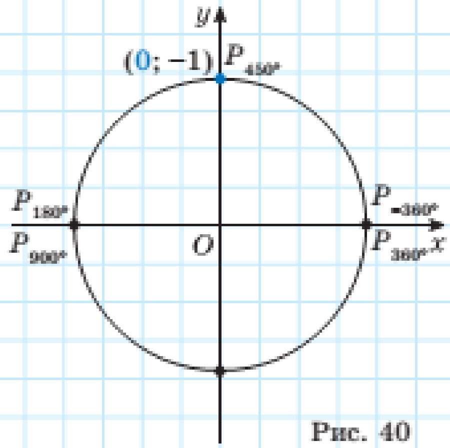

Рис. 40

Решение. Так как косинусом угла α называется абсцисса точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1;\ 0)$ единичной окружности вокруг начала координат на угол α, то нужно найти точку единичной окружности, абсцисса которой равна 0. Эта точка лежит на оси ординат, и из данных углов ей соответствует угол $\alpha = 450°$ (рис. 40). Правильный ответ в).

4. Найдите значение выражения:

а) $\cos 180° + \sin 90°$; б) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение. а) Абсцисса точки $P_{180°}$, соответствующей углу $180°$, равна -1 (рис. 41), значит, $\cos 180° = -1$. Ордината точки $P_{90°}$, соответствующей углу 90°, равна 1 (см. рис. 41), т. е. $\sin 90° = 1$. Значит, $\cos 180° + \sin 90° = -1 + 1 = 0$.

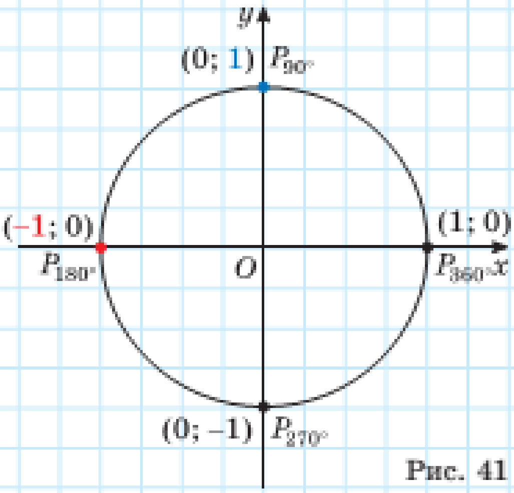

Рис. 41

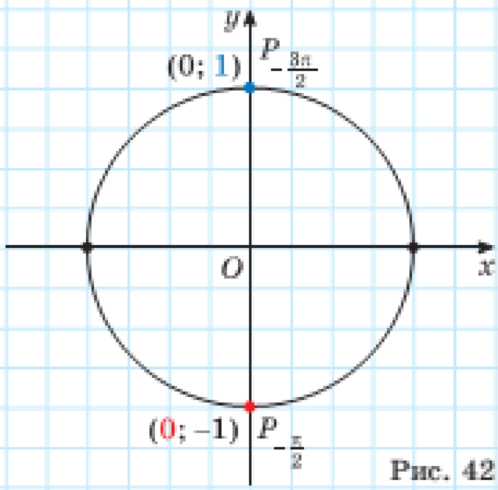

Рис. 42

б) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, а $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$ (рис. 42), тогда $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) =$ $= 0 - 1 = -1$.

5. Может ли $\cos\alpha$ быть равным:

а) 1,2; б) 0,89; в) $-\sqrt{5}$; г) $-\frac{3}{7}$?

Решение. Поскольку $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, то $\cos\alpha$:

а) не может быть равным 1,2, так как $1{,}2 \notin [-1; 1]$;

б) может быть равным 0,89, так как $0{,}89 \in [-1; 1]$;

в) не может быть равным $-\sqrt{5}$, так как $-\sqrt{5} \notin [-1; 1]$;

г) может быть равным $-\frac{3}{7}$, так как $-\frac{3}{7} \in [-1; 1]$.

6. Определите знак выражения:

а) $\cos(-49°)$; б) $\cos(-297°)$; в) $\sin\frac{18\pi}{19}$; г) $\sin 6$.

Решение. а) $\cos(-49°) > 0$, так как $-49°$ — угол четвертой четверти, а косинус в четвертой четверти положителен;

б) $\cos(-297°) > 0$, так как $-297°$ — угол первой четверти, а косинус в первой четверти положителен;

в) $\sin\frac{18\pi}{19} > 0$, так как $\frac{18\pi}{19}$ — угол второй четверти, а синус во второй четверти положителен;

г) $\sin 6 < 0$, так как 6 радиан — угол четвертой четверти, а синус в четвертой четверти отрицателен.

7. Сравните: а) $\sin 122°$ и $\sin 170°$; б) $\cos \frac{\pi}{8}$ и $\cos \frac{10\pi}{9}$.

Решение. а) Отметим на единичной окружности точки, соответствующие углам 122° и 170°, и сравним ординаты этих точек. Ордината точки $P_{122°}$ больше ординаты точки $P_{170°}$ (рис. 43), значит, $\sin 122° > \sin 170°$.

б) Сравним абсциссы точек единичной окружности $P_{\frac{10\pi}{9}}$ и $P_{\frac{\pi}{8}}$. Так как абсцисса точки $P_{\frac{\pi}{8}}$ больше абсциссы точки $P_{\frac{10\pi}{9}}$ (рис. 44), то $\cos \frac{\pi}{8} > \cos \frac{10\pi}{9}$.

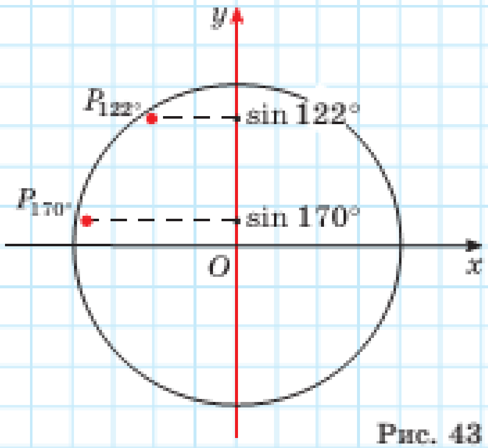

Рис. 43

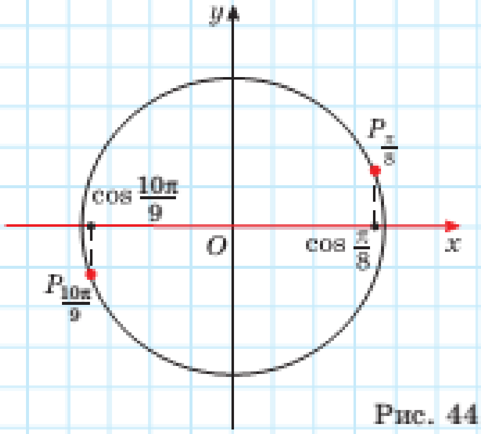

Рис. 44

8. С помощью единичной окружности найдите значение:

а) $\sin \frac{5\pi}{6}$; б) $\cos \frac{5\pi}{6}$.

Решение. а) Ордината точки $P_{\frac{5\pi}{6}}$ равна ординате точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ (рис. 45), поэтому

$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

б) Абсцисса точки $P_{\frac{5\pi}{6}}$ противоположна абсциссе точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ (см. рис. 45), поэтому

$\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

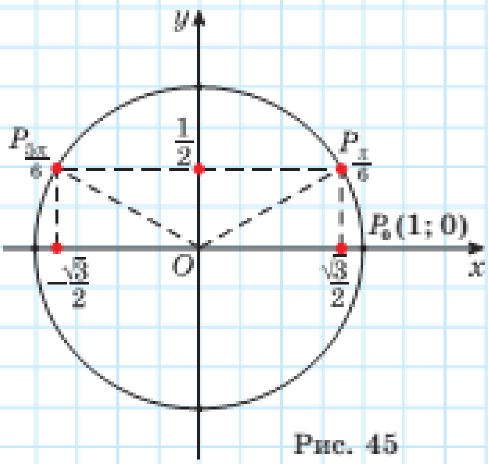

Рис. 45

Примеры основных заданий и их решения

1. Точка P_α единичной окружности имеет координаты $P_\alpha\left(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$. Используя определение тангенса и котангенса произвольного угла, найдите $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$.

Решение. Так как точка P_α единичной окружности имеет координаты $P_\alpha\left(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$, то $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, а $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

По определению тангенса: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5} : \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{4}$.

По определению котангенса: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, значит, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{5} : \frac{3}{5} = -\frac{4}{3}$.

2. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

Решение. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} =$
$= \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

3. Найдите, если это возможно, значение выражения:

а) $\operatorname{tg}\pi$; б) $\operatorname{ctg}2\pi$; в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$; г) $\operatorname{ctg}(-8{,}5\pi)$.

Решение. а) $\operatorname{tg}\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{-1} = 0$;

б) $\operatorname{ctg}2\pi$ не существует, так как $\sin 2\pi = 0$;

в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$ не существует, так как $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = 0$;

г) $\operatorname{ctg}(-8{,}5\pi) = \frac{\cos(-8{,}5\pi)}{\sin(-8{,}5\pi)} = \frac{0}{-1} = 0$.

4. Если $\operatorname{tg}\alpha = 0$, то α может принимать значения:

а) $180°$; б) $90°$; в) $-90°$; г) $-180°$; д) $-270°$.

Выберите правильные ответы.

Решение. Так как тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к косинусу угла α, то нужно найти те углы α, синус которых равен нулю. Среди предложенных углов это углы $-180°$ и $180°$. Можно также использовать ось тангенсов: найти точку на оси тангенсов, у которой ордината равна нулю (рис. 63), и определить соответствующие углы.

Правильные ответы а) и г).

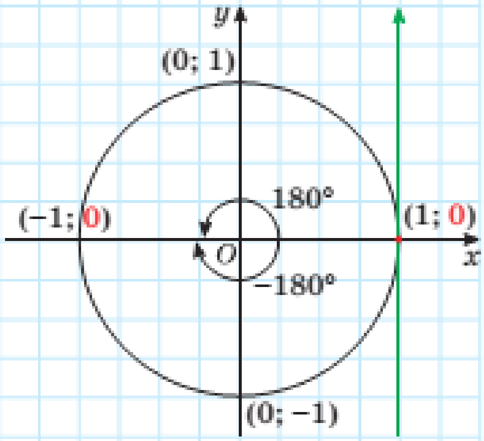

Рис. 63

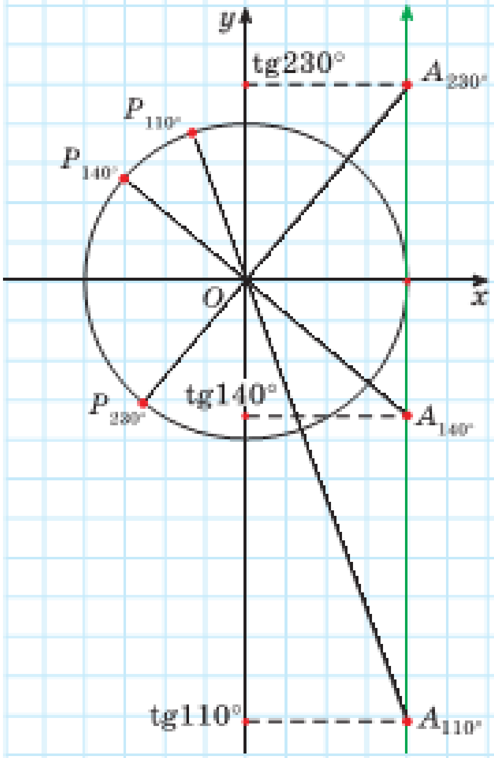

Рис. 64

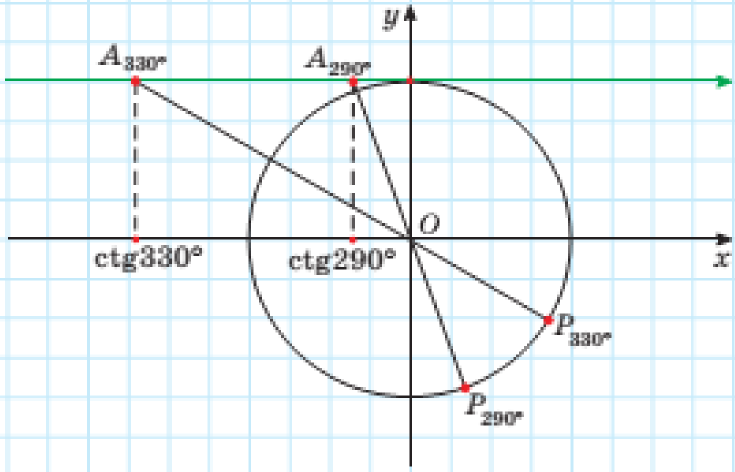

Рис. 65

5. Расположите в порядке возрастания: $\operatorname{tg} 110°$; $\operatorname{tg} 140°$ и $\operatorname{tg} 230°$.

Решение. Отметим на оси тангенсов точки, соответствующие углам 110°, 140° и 230° (рис. 64), и сравним ординаты этих точек. Поскольку ордината точки $A_{110°}$ меньше ординаты точки $A_{140°}$, а ордината точки $A_{140°}$ меньше ординаты точки $A_{230°}$, то $\operatorname{tg} 110° < \operatorname{tg} 140° < \operatorname{tg} 230°$.

6. Верно ли, что $\operatorname{ctg} 290° > \operatorname{ctg} 330°$?

Решение. Отметим на оси котангенсов точки, соответствующие углам 290° и 330° (рис. 65), и сравним абсциссы этих точек. Поскольку абсцисса точки $A_{290°}$ больше абсциссы точки $A_{330°}$, то неравенство $\operatorname{ctg} 290° > \operatorname{ctg} 330°$ верное.

7. Определите знак выражения:

а) $\operatorname{tg} 118°$; б) $\operatorname{ctg}(-149°)$.

Решение. а) Первый способ. По определению тангенса: $\operatorname{tg} 118° = \frac{\sin 118°}{\cos 118°}$. Так как угол 118° находится во второй четверти, то $\sin 118° > 0$, а $\cos 118° < 0$, значит, $\operatorname{tg} 118° < 0$.

Второй способ. Отметим на оси тангенсов точку, соответствующую углу 118° (рис. 66). Ордината точки $A_{118°}$ равна $\operatorname{tg} 118°$. Поскольку точка $A_{118°}$ имеет отрицательную ординату, то $\operatorname{tg} 118° < 0$.

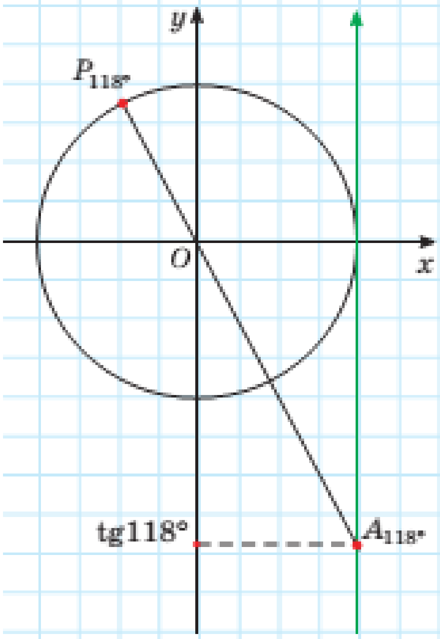

Рис. 66

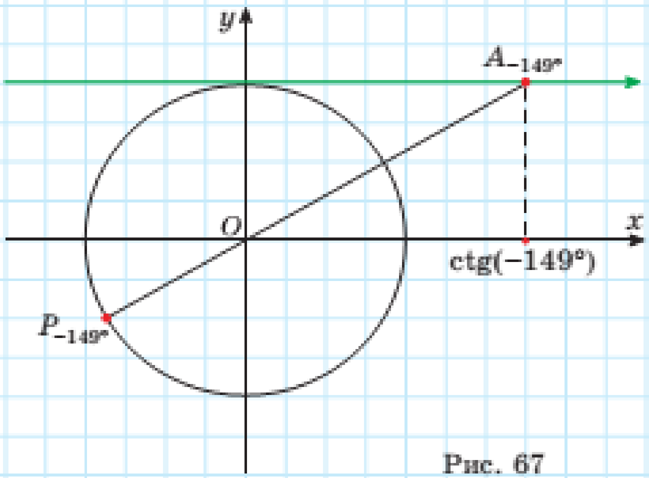

Рис. 67

б) Первый способ. По определению котангенса: $\operatorname{ctg}(-149°) = \dfrac{\cos(-149°)}{\sin(-149°)}$. Так как угол −149° находится в третьей четверти, то $\sin(-149°) < 0$ и $\cos(-149°) < 0$, значит, $\operatorname{ctg}(-149°) > 0$.

Второй способ. Отметим на оси котангенсов точку, соответствующую углу −149° (рис. 67). Абсцисса точки $A_{-149°}$ равна $\operatorname{ctg}(-149°)$. Поскольку точка $A_{-149°}$ имеет положительную абсциссу, то $\operatorname{ctg}(-149°) > 0$.

8. Определите знак произведения $\operatorname{ctg} 3 \cdot \operatorname{tg} 4$.

Решение. Так как угол 3 радиана находится во второй четверти, а угол 4 радиана — в третьей, то $\operatorname{ctg} 3 < 0$, а $\operatorname{tg} 4 > 0$, значит, $\operatorname{ctg} 3 \cdot \operatorname{tg} 4 < 0$.

Примеры основных заданий и их решения

1. Могут ли синус и косинус одного угла быть равными соответственно:

а) $\frac{5}{13}$ и $\frac{12}{13}$;   б) −0,3 и 0,4;   в) 0,8 и 0,6?

Решение. Для ответа на вопрос достаточно проверить, верно ли равенство $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (т. е. выполняется ли условие принадлежности точки P_α единичной окружности).

а) $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25+144}{169} = 1,$ могут;

б) $(-0,3)^2 + (0,4)^2 = 0,09 + 0,16 = 0,25 \neq 1,$ не могут;

в) $(0,8)^2 + (0,6)^2 = 0,64 + 0,36 = 1,$ могут.

2. Найдите:

а) $\cos\beta$, если $\sin\beta = -\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$;

б) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$ и $180° < \alpha < 270°$.

Решение. а) Из равенства $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ выразим $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$. Так как $\sin\beta = -\frac{5}{13}$, то $\cos^2\beta = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$. Тогда $\cos\beta = \frac{12}{13}$ или $\cos\beta = -\frac{12}{13}$. Поскольку $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ (угол четвертой четверти), то $\cos\beta = \frac{12}{13}$.

б) Так как $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, то $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$. Из формулы $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ найдем $\sin\alpha$: $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$; $\frac{5}{4} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, $\sin^2\alpha = \frac{4}{5}$. Так как $180° < \alpha < 270°$, а значения синуса угла в третьей четверти отрицательны, то $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

3. Упростите выражение:

а) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 7$;

б) $\frac{2\sin\beta\cos\beta + 1}{\sin\beta + \cos\beta}$;

в) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2$;

г) $\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

Решение. а) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 7 = 1 - 7 = -6$;

б) $\frac{2\sin\beta\cos\beta + 1}{\sin\beta + \cos\beta} = \frac{2\sin\beta\cos\beta + \sin^2\beta + \cos^2\beta}{\sin\beta + \cos\beta} = \frac{(\sin\beta + \cos\beta)^2}{\sin\beta + \cos\beta} = \sin\beta + \cos\beta$;

в) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2 = \operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha +$
$+ 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha = 2 + 2 = 4$;

г) $\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (\sin^2\alpha - 1)\sin^2\alpha + \cos^2\alpha =$

$= -\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \cos^2\alpha(-\sin^2\alpha + 1) =$

$= \cos^2\alpha(1 - \sin^2\alpha) = \cos^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \cos^4\alpha.$

4*. Найдите значение выражения $\frac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 5$.

Решение. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 5$, т. е. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 5$, тогда $\sin\alpha = 5\cos\alpha$.

Значит, $\frac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha} = \frac{3 \cdot 5\cos\alpha - \cos\alpha}{5\cos\alpha + 2\cos\alpha} = \frac{14\cos\alpha}{7\cos\alpha} = 2.$